Universidade de Aveiro
2017

Departamento de Matemática

ESTÁQUIO
AMARAL

Programação Linear

Universidade de Aveiro
2017

Departamento de Matemática

ESTÁQUIO
AMARAL

Programação Linear

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, área de especialização Investigação Operacional, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

O Júri/ the jury

Presidente / president	Prof. Doutor António Ferreira Pereira Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro
Vogais / examiners committee	Prof. Doutora Maria Adelaide da Cruz Cerveira Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
	Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (orientador)

agradecimentos / acknowledgements

Em primeiro lugar, ao Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra, com quem tive a honra e o privilégio de trabalhar nestes anos de mestrado, agradeço o seu trabalho dedicação, paciência e disponibilidade, e acima de tudo, as suas palavras de encorajamento e estímulo. Aos Professores do Departamento de Matemática e todos os Professores das disciplinas de Mestrado por partilharem os seus conhecimentos científicos, pelos apoios, envolvimentos, disponibilidades, incentivos, otimismos e encorajamento demonstrado.

À Professora Doutora Clara Maria Magalhães, ao Dr. Ângelo Ferreira, Engenheiro Miguel de Oliveira, à Professora Doutora Isabel Maria Simões Pereira pelos seus máximos apoios. Aos meus caros amigos conterrâneos e compatriotas timorenses aqui em Portugal especialmente nesta Universidade de Aveiro. A todos os meus amigos do curso pelas suas amizades, incentivos e compreensões da minha ausência ao longo deste percurso académico. À minha família e amigos, pelo apoio, compreensão, paciência e pelo estímulo constante à conclusão deste trabalho.

À Universidade de Aveiro, e em particular ao Departamento de Matemática pela oportunidade e pelas excelentes condições proporcionadas para desenvolver este trabalho. À Universidade Nacional Timor Lorosa´e na parceria com a Universidade de Aveiro, no sentido de cooperação continuar para capacitar os docentes.

Muito obrigado a todos!......

Palavras-chave

Programação Linear, método simplex, dualidade, pós-otimização, problemas de transporte.

Resumo

A Programação Linear pode ser considerada uma técnica que permite otimizar funções lineares sujeitas a restrições igualmente lineares. A Programação Linear permite modelar problemas que ocorrem nos mais diversos setores de atividade, como o comércio, a indústria, a gestão de recursos humanos.

A disciplina Programação Linear - breve introdução, integra o programa curricular do curso Ensino de Matemática, na Universidade Nacional Timor Lorosa'e, sendo importante para o professor um aprofundamento e uma ampliação do conhecimento matemático nesta área. Assim, o objetivo desta dissertação é fazer um estudo, de modo acessível, da Programação Linear. Neste trabalho são apresentados exemplos de problemas de Programação Linear, bem como explicada a sua resolução algébrica e gráfica. É estudado o método simplex, desenvolvido por Dantzig, para a resolução de problemas de Programação Linear e são referidos alguns aspetos geométricos que permitem dar uma interpretação a estes problemas e às suas soluções. Aborda-se a teoria da dualidade, a pós-otimização e o caso particular do problema de transporte.

Keywords

Linear Programming, simplex method, duality, post-optimization, transportation problem.

Abstract

Linear Programming can be considered a technique that optimizes a linear function over a feasible set defined by a set of linear constraints. Linear programming allows to model problems that arise in diverse sectors of activity, such as commerce, industry, human resources management.

The course “A brief introduction to Linear Programming” is a curricular unit of the Teaching Mathematics degree at the National University of Timor Lorosa’e. It is crucial for the lecturers of this course to deepening and broadening their mathematical knowledge in this area. The objective of this dissertation is to make an accessible text of Linear Programming that can be used by those lectures in their classes. In this dissertation, examples of linear programming problems are presented as well as algebraic and graphical resolution of some of them. In addition, the simplex method developed by Danzig for solving linear programming problems is introduced, and some geometric aspects that allow an interpretation of this method and the corresponding solutions are explored. It is explored the theory of duality, including properties of dual problems, post-optimization, as well as the particular case of transportation problems.

Conteúdo

Lista das figuras

Lista das tabelas

Capítulo 1

1. Introdução

A escolha do tema desta Dissertação teve por base, além do gosto pessoal, a necessidade de ampliar e consolidar os conhecimentos e, assim, contribuir, como professor, para elaboração do novo texto de apoio à disciplina de Especialização, denominada *Programação Linear*, de modo a esse texto poder futuramente ser utilizado por alunos do terceiro ano, semestre VI, da licenciatura em Ensino da Matemática, lecionada no Departamento do Ensino da Matemática, da Universidade Timor-Lorosa´e.

A *Programação Linear* (PL) está relacionada com a otimização (minimização ou maximização) de uma função linear, satisfazendo um conjunto de equações e/ou inequações (restrições) igualmente lineares. Este problema foi inicialmente concebido por George B. Dantzig em 1947 quando trabalhava como consultor matemático da Unidade de Controlo da Forca Aérea Norte Americana. Apesar de atualmente se saber que o matemático e economista soviético L. V. Kantorovich formulou e resolveu previamente o mesmo tipo de problemas em 1939, o seu trabalho permaneceu ignorado até 1959. Por esse facto, é atribuída a Dantzig a conceção dos problemas de PL, sendo a denominação Programação Linear usada pela primeira vez pelo economista e matemático T. C. Koopmans em 1948, [1], [2].

A programação linear (PL) é uma área da Matemática Aplicada usada no ramo de Investigação Operacional (IO). A origem da IO como ciência é atribuída à coordenação das operações militares durante a 2ª Guerra Mundial, [3]. A palavra "programação" refere-se a uma programação de tarefas ou planificação, não a uma programação no sentido da informática. A palavra "Linear" advém do facto de as expressões (condições) utilizadas serem lineares.

O objetivo é otimizar problemas de decisão, através da utilização de modelos que representem uma realidade. A solução ótima na globalidade é um mínimo ou máximo a ser alcançado, nas condições existentes. A aplicabilidade da PL é enorme, pode aplicar-se a situações militares, indústria, agricultura, economia, saúde, etc. Contudo, é na área económica que mais se tem desenvolvido. Desejo que os alunos se familiarizem com conceitos sobre a decisão em termos de planeamento, que podem ter a ver com minimizar consumos, custos ou maximizar lucros.

Um modelo de PL é constituído por:

- Variáveis de decisão (quantificam as decisões a tomar).
- Objetivo (o que se pretende otimizar).
- Restrições (condições que têm de ser satisfeitas).

Os procedimentos para determinar a solução (de modo a que o objetivo se cumpra) podem ser variados. O mais antigo é o método simplex. O método simplex consiste de um algoritmo que permite resolver problemas de Programação Linear. Contudo o método que iremos utilizar baseia-se na representação gráfica. Foi George Dantzig que, entre 1947 e 1949, desenvolveu os conceitos principais da PL. Como curiosidade refira-se que o primeiro problema resolvido por Dantzig – foi um problema de dieta de custo mínimo. Este problema necessitava da resolução de um sistema de 9 equações (requisitos de nutrição) e 77 variáveis de decisão. Em 1947, George Dantzig e outros cientistas do Departamento da Força Aérea Americana, apresentaram um método denominado Simplex para a resolução dos problemas de Programação Linear (PL). As primeiras e grandes aplicações foram no domínio militar, [3].

Capítulo 2

2. O Modelo de Programação Linear

2.1. O Problema de Programação Linear

A Programação Linear permite modelar matematicamente muitos problemas reais. A principal característica destes modelos é a de que objetivo a otimizar e as restrições podem ser expressas através de expressões lineares conjunto de variáveis que representam as decisões. Para um estudo mais completo, poder-se-á consultar [1],[3],[4], [5], [6], [7], [8], [9].

Em geral a Programação Linear pode ser escrito da seguinte forma: dado um conjunto de m restrições (desigualdades ou equações lineares) em n variáveis, queremos determinar os valores (usualmente não-negativos) dessas variáveis que satisfazem as restrições e maximizam ou minimizam uma função linear nessas variáveis. A forma geral de programação linear é seguinte:

Otimizar (*maximizar* ou *minimizar*)	: função objetivo
Sujeito a	: conjunto de restrições

Matematicamente:

$$Min(Max):\quad z = \sum_{j \in J} c_j x_j \tag{2.1}$$

$$sujeito\ a:\quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, i \in I_1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i, i \in I_2 \tag{2.3}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, i \in I_3 \tag{2.4}$$

$$x_j \geq 0 \tag{2.5}$$

Onde $x_j, j \in J$, são as variáveis de decisão, z é a função objetivo a ser otimizada. (1), (2), (3) e (4) são as restrições, (4) é as restrições de sinal nas variáveis. c_j são os coeficientes na função objetivo e a_{ij} são os coeficientes das restrições.

2.2. Modelação de um problema

Nesta seção ilustramos os elementos básicos de um modelo de programação linear. Os exemplos forneceram ideias concretas para a solução e interpretação dos problemas gerais de programação linear, (*ver* [1], [3], [4], [6], [10], [8],[11], [12], [13], [14]).

***Exemplo 2.2.1 Problema de dieta* (*problema minimização*) (ver,**[15]**).**

Figura 1: Ilustração do problema dieta

Cinco tipos de alimentos (ver figura 1) estão disponíveis na elaboração da merenda escolar numa escola do ensino básico em Suai. Cada porção (50 gramas) de cada tipo de alimento contém os elementos nutritivos calorias, gordura, proteína e hidratos de carbono. A composição dos alimentos dos tipos 1, 2, 3, 4 e 5 fornecem os seguintes elementos nutritivos (em gramas):

Tipo de Alimentos	elementos nutritivos por porção (50 gramas do tipo de alimento)			
	Calorias (Kcal)	Gordura (g)	Proteínas (g)	Hidratos de carbono (g)
1	103	1.5	4	30
2	40	3	1	1
3	38	2	2	1.3
4	75	8	6	1.2
5	40	2	1	1

Tabela 1: Dados problema dieta.

Os estudantes devem ingerir pelo menos 225 calorias, 9 g de gordura, 13 g de proteínas e 15 g de Hidratos de carbono por refeição. Os preços de cada porção dos alimentos do tipo 1, 2, 3, 4 e 5 são: 0.8; 1.0; 1.0; 1.2 e 0.75 dólares, respetivamente. Formule o problema de modo a que o custo seja minimizado.

Construir um modelo matemático (de Programação Linear) implica decidir: Quais são as variáveis decisões? quais são as restrições que existem? Qual é o objetivo?

Identificar as variáveis de decisão:

As variáveis de decisão são as quantidades de cada tipo de alimento contidas numa refeição. No presente exemplo, pretendemos garantir quantidades mínimas por cada elemento nutritivo (calorias, gordura, proteínas e Hidratos de carbono), em gramas, que os estudantes devem ingerir na refeição. O objetivo é o de minimizar o custo total da refeição.

Representando essas quantidades em termos algébricos, tem-se:

x_1 = quantidade de porções de alimentos do tipo 1.

x_2 = quantidade de porções de alimentos do tipo 2.

x_3 = quantidade de porções de alimentos do tipo 3.

x_4 = quantidade de porções de alimentos do tipo 4.

x_5 = quantidade de porções de alimentos do tipo 5.

Identificar as restrições:

Neste problema, as restrições dizem respeito às quantidades mínimas dos elementos nutritivos que devem ser ingeridos por refeição. Cada porção do tipo de alimentos 1 fornece 103 Kcal. Como cada refeição inclui x_1 porções de tipos de alimentos 1, então o elemento nutritivo calorias fornecidas por alimentos do tipo 1 será $103x_1$ por refeição. Analogamente, as calorias fornecidas pelos restantes tipos alimentos serão $40x_2, 38x_3, 75x_4, 40x_5$, respetivamente. Assim, a quantidade total de calorias na composição dos cinco tipos de alimentos será:

$$103x_1 + 40x_2 + 38x_3 + 75x_4 + 40x_5$$

Sabe-se que os estudantes devem ingerir pelo menos 225 calorias por refeição. Assim, a restrição relativa ao elemento nutritivo calorias será:

$$103x_1 + 40x_2 + 38x_3 + 75x_4 + 40x_5 \geq 225$$

Para obter a restrições relativas aos elementos nutritivos gordura, proteínas e Hidratos de carbono por refeição, utiliza-se um raciocínio similar. As restrições resultantes serão:

$$1.5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 \geq 9$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 \geq 13$$

$$30x_1 + x_2 + 1.3x_3 + 1.2x_4 + x_5 \geq 15$$

Para finalizar, deseja-se restringir as variáveis de decisão no domínio dos reais não-negativos, isto é, $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Essas restrições, uma para cada variável de decisão, são denominadas restrições de não-negatividade. Note-se que uma refeição pode incluir um número não inteiro de porções de cada tipo de alimento.

Identificar o objetivo:

O objetivo é minimizar o custo total: $z_1 = 0.80x_1 + x_2 + x_3 + 1.2x_4 + 0.75x_5$

Habitualmente, o modelo de programação linear escreve-se na seguinte forma:

Min: $z_1 = 0.80x_1 + x_2 + x_3 + 1.2x_4 + 0.75x_5$

sujeito A: $103x_1 + 40x_2 + 38x_3 + 75x_4 + 40x_5 \geq 225$

$1.5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 \geq 9$

$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 \geq 13$

$30x_1 + x_2 + 1.3x_3 + 1.2x_4 + x_5 \geq 15$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Resumidamente:

$$Min: z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$s.a: \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i, i \in I$$

$$x_j \geq 0, j \in J$$

Onde i é as quantidades dos números das restrições, e j é as quantidades dos números das variáveis.

Exemplo 2.2.2 problema de alocação de recursos (problema de maximização).

Figura 2: Ilustração do problema de alocação de recursos

Com o aumento da procura no mercado internacional, a empresa NCBA (National Cooperativa Business Association) pretende aumentar a produção do tipo café *robusta* e tipo café *arábica*. Para aumentar a produção até 30 toneladas café tipo robusta e 20 toneladas do café tipo arábica, a empresa NCBA precisa de novas terras e de empregar mais trabalhadores. Para produzir uma tonelada do café tipo robusta, são necessários 20 hectares e 15 trabalhadores. Para produzir cada tonelada de café tipo arábica são necessários 40 hectares e 12 trabalhadores. A empresa dispõe apenas de 800 hectares e pode recrutar no máximo 450 trabalhadores. A NCBA quer planear a produção de cada tipo de café de modo a maximizar a produção total. Para tornar mais fácil criar um modelo matemático, os dados são condensados numa tabela, como se mostra a seguir:

Recurso	Tipo de café		Disponibilidade Recurso
	Robusta	Arábica	
Área	20 hectares	40 hectares	Máximo 800 hectares
Trabalhadores	15 pessoas	12 pessoas	Máximo 450 pessoas
Produção máxima	30 toneladas	20 toneladas	

Tabela 2: Dados problema de alocação de recursos.

De seguida vamos identificar as variáveis decisões e as restrições do problema.

***As variáveis decisão*:**

- x_1 = quantidade de produção (em toneladas) do tipo café robusta.
- x_2 = quantidade de produção (em toneladas) do tipo café arábica.

***As restrições*:**

As restrições são, respetivamente, a área disponível, o número máximo de trabalhadores e as quantidades máximas e mínimas a produzir. Tem-se então:

$$
\begin{aligned}
20x_1 + 40x_2 &\leq 800 \\
15x_1 + 12x_2 &\leq 450 \\
x_1 \qquad\qquad &\leq 30 \\
x_2 &\leq 20 \\
x_1, \qquad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

***O objetivo*:**

Maximizar quantidade da produção (em toneladas) dos tipos de café robusta e arábica:

$x_1 + x_2$

O problema traduz-se formalmente pelo seguinte modelo:

Maximizar: $z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{lrl}
s.\ a: & 20x_1 + 40x_2 & \leq 800 \\
& 15x_1 + 12x_2 & \leq 450 \\
& x_1 \qquad\quad & \leq 30 \\
& x_2 & \leq 20 \\
& x_1, \quad\; x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Em seguida indicamos sugestões de como lidar com algumas restrições que habitualmente ocorrem nos problemas de PL.

Restrições de limites inferiores e superiores

- NCBA quer aumentar a produção até 30 toneladas café robusta e 20 toneladas café arábica, temos $x_1 \leq 30$ e $x_2 \leq 20$.
- Comprometi-me a enviar pelo menos 30 toneladas do produto café arábica para o porto de Díli, temos $x_a \geq 30$.
- tenho de enviar exatamente 50 toneladas do produto café arábica para porto Díli, temos x_{ar} = 50.

Exemplo 2.2.3 Problema de transporte.

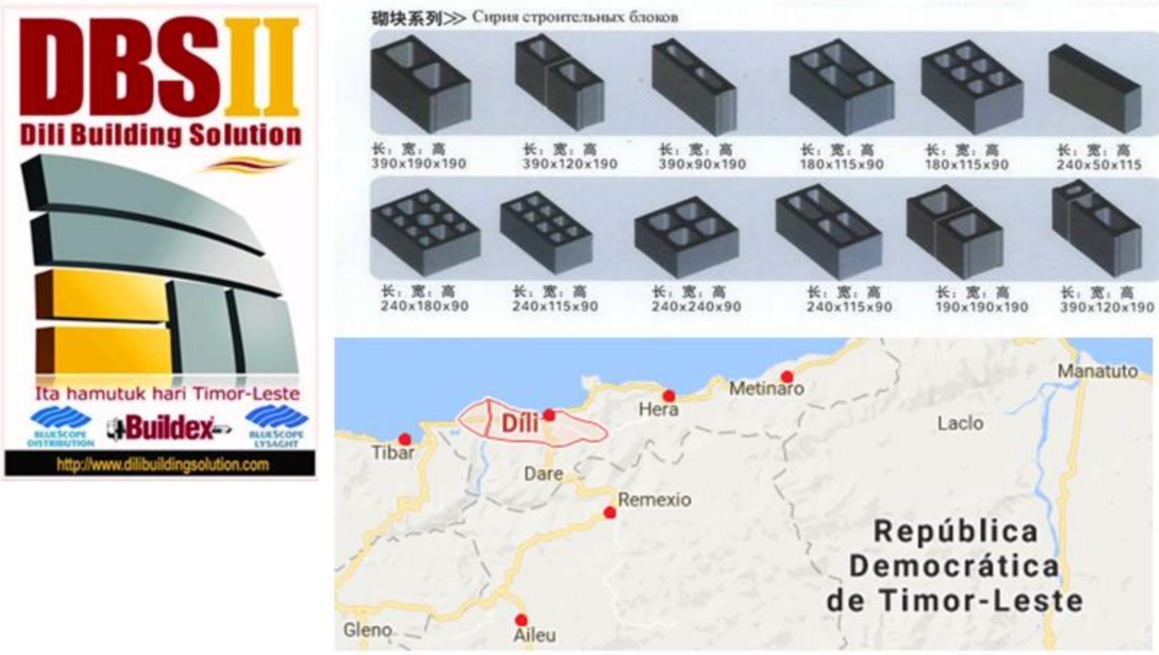

Figura 3: Ilustração do problema de transporte

A companha Díli Building Solution (ou DBS II: Ver figura 3) produz 3.200.000 toneladas (9aproximadamente 600.000 peças) por semana de bloco estrutural em duas localidades diferentes (Dili; Hera) que devem ser entregues em outras quatro localidades (Aileu; Metinaro; Remexio; Tibar). As quantidades produzidas e requeridas são indicadas a seguir.

As quantidades produzidas nas origens		As quantidades requeridas nos destinos	
		Aileu(D_1)	800000 toneladas
Dili(O_1)	1800000 toneladas	Metinaro(D_2)	780000 toneladas
Hera(O_2)	1400000 toneladas	Remexio(D_3)	660000 toneladas
		Tibar(D_4)	960000 toneladas

Tabela 3: Dados problema de transporte.

Os custos unitários de transporte, por tonelada, de cada origem (Díli, Hera) para cada destino (Aileu, Metinaro, Remexio, Tibar), são dados no quadro que se segue.

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	\$ 100	\$80	\$ 40	\$ 60
O_2	\$ 120	\$ 30	\$ 50	\$90

Tabela 4: Dados problema de transporte.

Uma solução para este problema encontra-se na Figura 4 cujo custo é:

Z = 800000 (100) + 780000 (80) + 220000 (40) + 440000 (50) + 960000 (90)

= 259600000.

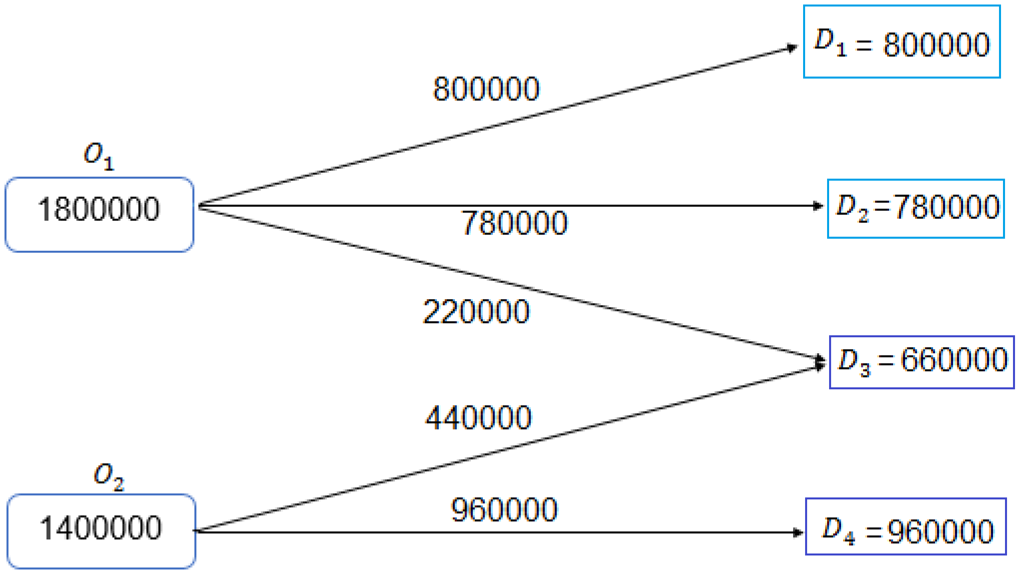

Figura 4: Exemplo de uma solução de um problema de transportes.

Supondo que não existem limitações na capacidade de transporte de uma localidade para as outras, pretende-se determinar as quantidades a transportar de modo a minimizar os custos totais de transporte, de modo a garantir que a oferta é totalmente gasta e a procura é totalmente satisfeita (trata-se de um problema de transportes equilibrado, a procura total coincide com a oferta total). De seguida formulamos o problema:

***Variáveis decisão*:**

- x_{11} = quantidade, em toneladas, a transportar da origem "O_1" para o destino "D_1".
- x_{12} = quantidade, em toneladas, a transportar da origem "O_1" para o destino "D_2".
- x_{13} = quantidade, em toneladas, a transportar da origem "O_1" para o destino "D_3".
- x_{14} = quantidade, em toneladas, a transportar da origem "O_1" para o destino "D_4".
- x_{21} = quantidade, em toneladas, a transportar da origem "O_2" para o destino "D_1".
- x_{22} = quantidade, em toneladas, a transportar da origem "O_2" para o destino "D_2".
- x_{23} = quantidade, em toneladas, a transportar da origem "O_2" para o destino "D_3".
- x_{24} = quantidade, em toneladas, a transportar da origem "O_2" para o destino "D_4".

***O objetivo* é:**

Minimizar o custo total de transporte:

Min z = 100 x_{11} + 80x_{12} + 40x_{13}+ 60x_{14}+ 120x_{21}+ 30x_{22}+ 50x_{23}+ 90x_{24}

As restrições em relação a oferta:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$ = 1.800.000

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}$ = 1.400.000

As restrições em relação à procura:

$x_{11} + x_{21}$ = 800000

$x_{12} + x_{22}$ = 780000

$x_{13} + x_{23}$ = 660000

$x_{14} + x_{24}$ = 960000

x_{11} , x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, $x_{24} \geq 0$.

Exercícios – **Formule cada um dos problemas seguintes.**

1. Uma empresa fabrica 2 produtos P_1 e P_2. O lucro por unidade de P_1 é de 100 unidades monetárias (u.m.) e o lucro unitário de P_2 é de 150 u.m. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P_1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P_2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As procuras esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P_1 e P_2 não devem ultrapassar 40 unidades de P_1 e 30 unidades de P_2 por mês. Construa o modelo do sistema de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro da empresa.
2. Um comerciante pretende obter um lucro não inferior a 140 euros com a venda de um produto que pode ser encomendado a duas fábricas *A* e *B.* A fábrica *A* garante um lucro de 20 euros/tonelada e pode produzir 1 tonelada em 4 meses, mas não pode produzir mais de 5 toneladas. A fábrica *B* garante um lucro de 17.5 euros/tonelada e pode produzir à razão de 1 tonelada em cada 3 meses, mas não mais de 6 toneladas. Como efetuar as encomendas de modo a obter a mercadoria no mínimo prazo possível? (ver [16])
3. Pretendo investir 200 u.m. nos próximos cinco meses de modo a maximizar a quantidade disponível no final do quinto mês. Em cada mês é possível decidir a quantidade de dinheiro a investir em determinado tipo de investimento. Ao fazê-lo, por cada u.m. investida, recebo no final do terceiro mês 4 u.m., contudo fico obrigada a pagar 1 u.m. no primeiro mês e 2 u.m. no segundo mês, por cada u.m. investida. Uma exigência ´e a de que no final de cada mês a quantidade de dinheiro disponível seja positiva. Formule o programa linear (ver [16]).
4. Uma companhia de transporte tem dois tipos de caminhões: O tipo “A” tem 2m^3 de espaço refrigerado e 3m^3 de espaço não refrigerado; O tipo “B” tem 2m^3 de espaço refrigerado e 1m^3 de espaço não refrigerado. O cliente quer transportar um produto que necessitará 16 m^3 de área refrigerada e 12 m^3 de área não refrigerada. A companhia calcula em 1.100 litros o combustível necessário para uma viagem com o caminhão “A” e 750 litros para o caminhão “B”. Quantos caminhões de cada tipo deverão ser usados no transporte do produto, com o menor consumo de combustível.
5. Um aviário deseja que a ração dos seus frangos tenha uma certa quantidade de nutrientes considerados essenciais à produção de frangos de boa qualidade. Existem no mercado

diversos tipos de ração R_1, R_2 e R_3 com um custo por Kg de $4, $6 e $2, respetivamente. A quantidade de nutrientes existente em cada Kg de ração, bem como a quantidade mínima e máxima de nutrientes necessários a uma alimentação equilibrada encontra-se no quadro seguinte.

	Amido	lípidos	vitamina C	vitamina D	sódio
R_1	6	1	10	8.3	0.9
R_2	8	0.5	15	5.5	0.5
R_3	7	0.8	19	10	1
Mínimo	11	0.9	13	6	0.5
Máximo	20	2	35	20	1.5

Sabe-se que o aviário não pode encomendar mais de 200 Kg de ração R_1, mais de 130 Kg de ração R_2 e mais de 190 Kg de ração R_3 e que necessita de pelo menos 400 Kg de ração. Como pode o aviário garantir uma boa alimentação aos frangos ao mais baixo custo?[16]

6. Pretende-se planear o fornecimento de energia para a climatização de um complexo desportivo. As 3 fontes energéticas possíveis são a eletricidade da rede geral, a energia solar e a energia eólica. Dadas as dimensões do complexo não é possível obter mais de 75 unidades diárias de energia solar e de 95 unidades diárias de energia eólica. As necessidades diárias previstas são de 80 unidades de energia para o aquecimento da água da piscina e dos duches e de 170 unidades para o ar condicionado (a unidade de medida da energia é comum). Estas necessidades energéticas podem ser satisfeitas por qualquer das formas de energia (ou combinação delas) com os seguintes custos por unidade:

	Rede Geral	Energia Solar	Energia Eólica
Aquecimento de água	75	60	40
Ar condicionado	85	65	45

"Qual a redução máxima que é possível obter nos custos energéticos diários de climatização se em vez de usar apenas a eletricidade da rede geral for também usada as outras formas de energia?"

7. Uma empresa do setor alimentar produz e comercializa gelados de chocolate de leite e de chocolate amargo. A empresa pretende estar presente no mercado de consumo doméstico e no da compra por impulso. Para o primeiro comercializa embalagens *standard*, de 0.5 *l*, e embalagens familiares, de 1 *l*; no segundo comercializa cones de 0.125 *l*. As margens brutas por litro de gelado são de 10 *u.m.*, 9 *u.m.* e 12 *u.m.*, respetivamente, para o gelado de chocolate de leite e de 14 *u.m.*, 13 *u.m.* e 18 *u.m.*, respetivamente, para o gelado de chocolate amargo. Os estudos de mercado indicam que a empresa deve comercializar entre 20% e 30% da sua produção no mercado doméstico e que os gelados de chocolate amargo têm menos procura, não devendo representar mais de 25% da produção total. A empresa pretende planear a produção e comercialização de gelados de chocolate para o próximo mês de agosto, sabendo que a sua capacidade produtiva mensal é de 200 mil litros. Qual o plano que a empresa deve adotar?

2.3. Formas de um problema de PL e operações de reformulação

De seguida apresentamos a forma padrão (*standard*) e as formas canónicas de um problema de programação linear com *m* restrições e *n* variáveis (*ver* [1], [3], [4], [5], [6], [8], [10], [17]).

Formas *Canónicas* de um problema de PL	
Maximizar: $z = \sum_{j\in J} c_j x_j$ s. a: $\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i \in I$ $x_j \geq 0,\ j \in J$ Onde $I = 1, 2, \ldots, m$ e $J = 1, \ldots, n$.	*Minimizar*: $z = \sum_{j\in J} c_j x_j$ s. a $\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \geq b_i,\ i \in I$ $x_j \geq 0,\ j \in J$ Onde $I = 1, \ldots, m$ e $J = 1, 2, \ldots, n$.
Forma *Standard* de um problema de PL	
Min (*Max*): $z = \sum_{j\in J} c_j x_j$ **(*2.6*)** s. a $\sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i,\ i \in I$ **(*2.7*)** $x_j \geq 0,\ j \in J$ **(*2.8*)** Onde $I = 1, 2, \ldots, m$ e $J = 1, 2, \ldots, n, \ldots, (m+n)$	

Tabela 5:Formas de um problema de PL.

Em termos de matriciais, a forma de um problema de PL dada por:

Formas *Canónicas* de um problema de PL	
Max: $z = c^t x$ $s.\,a$: $Ax \le b$ $x \ge 0$	Min: $z = c^t x$ $s.\,a$: $Ax \ge b$ $x \ge 0$
Forma *Standard* de um problema de PL	
Min (max): $z = c^t x$ (***2.9***) $s.\,a$: $Ax = b$ (***2.10***) $x \ge 0$ (***2.11***)	

Tabela 6: Formas de um problema PL em matriciais.

Para converter os problemas numa determinada forma, poderemos ter necessidade de recorrer às seguintes operações de reformulação.

(i). Para transformar uma inequação numa equação utilizamos as chamadas variáveis folga (ou *slack*):

$$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \le b_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j\in J} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j\in J} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$

No exemplo 2.2.2, temos:

$$\begin{array}{cccccccc} 20x_1 & +40x_2 & +x_3 & & & & = & 80 \\ 15x_1 & +12x_2 & & +x_4 & & & = & 45 \\ x_1 & & & & +x_5 & & = & 30 \\ & x_2 & & & & +x_6 & = & 20 \\ x_1\ , & x_2\ , & x_3 & ,x_4 & ,x_5 & ,x_6 & \ge & 0 \end{array}$$

onde x_3, x_4, x_5 e x_6 são a variáveis f*olga*.

(ii). Uma igualdade é equivalente terá conjunção de duas desigualdades

$$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j\in J} a_{ij}x_j \le b_i \\ \sum_{j\in J} a_{ij}x_j \ge b_i \end{cases}$$

(iii). As restrições de sinal são restrições de não negatividade, mas também podemos ter limites, inferiores ou superiores, no seu valor. Para obter restrições de não negatividade devem efetuar-se mudanças de variáveis

$x_j \geq u_j \Rightarrow x_j' = x_j - u_j, x_j' \geq 0$

$x_j \leq u_j \Rightarrow x_j' = u_j - x_j, x_j' \geq 0$

(iv). As variáveis podem não ter qualquer restrição de sinal, $x_j \in \mathbb{R}$, e dizemos que são variáveis livres. Nesse caso, também escrevemos

$$x_j \gtrless 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = x_j' - x_j'' \\ x_j', x_j'' \geq 0 \end{cases}$$

2.4. Convexidade e caracterização de poliedros

O conjunto das soluções admissíveis de um problema de programação linear é um caso particular de conjuntos convexos. Assim, nesta secção são apresentados os conceitos sobre a convexidade de conjuntos relevantes para a programação linear, enunciando os principais resultados teóricos e descrevendo alguns exemplos de conjuntos convexos, (*ver* [1], [7], [10], [18]). Para mais fácil compreensão, são apresentados exemplos que exploram estes conceitos em $\mathbb{R}^2$, no entanto deve ter-se sempre presente o facto de que os conceitos são válidos em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.4.1 **— (Conjunto convexo)**

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é conjunto convexo se $\forall x_1, x_2 \in S$, então $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Ou seja, um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se convexo se o segmento de reta entre quaisquer dois pontos em S está contido em S, isto é, se para quaisquer $x_1, x_2 \in S$ e $\lambda \in [0,1]$, verifica-se que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$.

Nota: Por convenção, o conjunto vazio é um conjunto convexo.

Geometricamente, a definição 2.4.1 pode visualizar-se nas regiões convexas bidimensionais na *Figura – 5*.

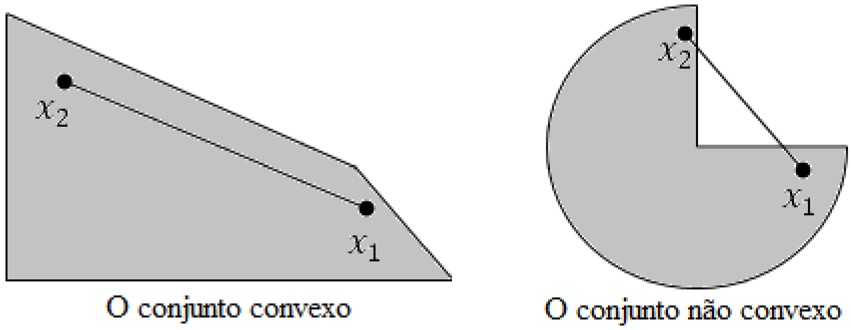

Figura 5: Ilustração de definição dos conjuntos convexos.

Exemplo 2.4.1. Os conjuntos seguintes são conjuntos convexos.

(i). $W = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$

(ii). $V = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 3, x_1 \geq x_2, x_2 \geq 0\}$

Observe que o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ da forma $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_2 \leq x_1^2\}$ não convexo, pois tomando, por exemplo: os pontos (-1, 1), (1, 1) ∈ $\mathbb{R}^2$, temos que,

$\frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{2}(1,1) \notin S$.

Lema 2.4.1

Se $S_1, S_2, \ldots S_P \subseteq \mathbb{R}^n$ são conjuntos convexos então $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_P$ é convexo.

Demonstração.

Se a intersecção é vazia, então S é convexo.

Caso contrário, fixemos arbitrariamente $x_1, x_2 \in S$.

Seja, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Considere i = 1, 2, . . ., p. Uma vez que $x_1, x_2 \in S$, segue-se pela definição de interseção de conjuntos que $x_1, x_2 \in S_i$, para cada i. Logo, para cada i, $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in S_i$, pela convexidade de S_i. Segue-se, novamente pela definição de intersecção de conjuntos, que $z \in S$. Pela arbitrariedade da escolha de $x_1, x_2 \in S$, S é um conjunto convexo. ■

Lema 2.4.2

O conjunto das soluções admissíveis de um sistema de desigualdades lineares da forma $S = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b\}$ é um conjunto convexo.

Demonstração.

Vamos mostrar de seguida que a região admissível de um problema de PL é sempre um conjunto convexo. Considere-se o conjunto das soluções admissíveis S escrito na forma padrão $S = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax = b, x \geq 0\}$.

Sejam $x_1, x_2 \in \boldsymbol{S}$. Então para $\forall\lambda \in [0,1]$ temos:

$$A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = A\lambda x_1 + A(1-\lambda)x_2$$

$$= \lambda A x_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

Portanto, $Ax = b$ com $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, ou seja, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$. ■

***Definição 2.4.2* — (poliedro)**

Um poliedro P é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ descrito por um conjunto finito de desigualdades lineares, $P = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b\}$.

Note que no *Exemplo 2.4.1* W é um conjunto convexo, mas não é um poliedro, pois não pode ser descrito por um número *finito* de desigualdades, e V é um poliedro. Em $\mathbb{R}^2$, um poliedro é a intersecção de um número finito de semiplanos.

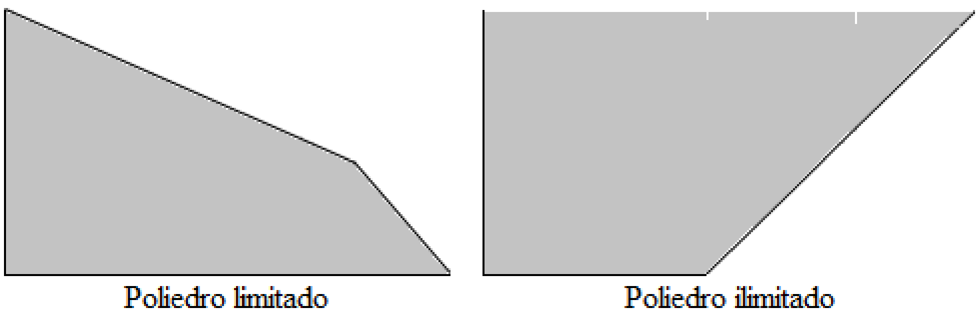

Figura 6: Ilustração poliedro limitado e ilimitado.

Lema 2.4.3

Um poliedro em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.

Demonstração.

Um poliedro é o conjunto resultante de um sistema finito de equações e inequações lineares, isto é, uma intersecção de semiplanos que são conjuntos convexos. Como a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo, então um poliedro é um conjunto convexo. ■

Definição 2.4.3 **— (Politopo)**

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que um conjunto *S* é um *polítopo*, quando S é um poliedro limitado.[1]

Exemplo 2.4.2.

(i). $P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \leq 20;\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15;\ x_1, x_2 \geq 0\}$

(ii). $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \geq 20;\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15\}$

O poliedro P é um politopo, mas o poliedro Q não é um politopo.

Os poliedros podem ser caracterizados através de um conjunto de desigualdades (ver atrás) ou através de um conjunto de pontos (pontos extremos) e vetores (raios extremos). De seguida vamos introduzir alguns conceitos que nos permitem definir pontos extremos e raios extremos.

Definição 2.4.4 **— (Combinação linear)**

Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear dos vetores $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, se existirem escalares $\lambda \in \mathbb{R}^k$, tais que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$.

---

[1] Um conjunto diz-se limitado se se conseguir definir uma "bola" que o contenha.

Adicionalmente, se

(i). $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, então x é uma combinação linear convexa dos vetores $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

(ii). $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, então x diz-se uma combinação afim dos vetores $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

(iii). $\lambda \geq 0$, então x diz-se uma combinação cónica dos vetores.

***Definição* 2.4.5 — (Ponto extremo)**

Um ponto x de um conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ diz um *ponto extremo* se não existirem dois pontos distintos $x_1, x_2 \in S$ tais que, para algum λ, $0 < \lambda < 1$, $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, isto é x não pode ser escrito como combinação linear convexa de quaisquer dois pontos distintos de S. Observe que, na *Figura -7*, x_1 é o ponto extremo de S, no entanto x_2 e x_3 não são pontos extremos.

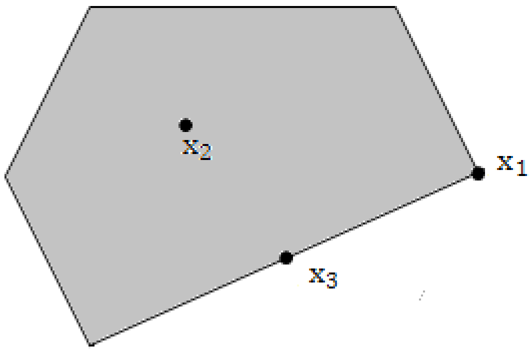

Figura 7: Ilustração exemplo o ponto extremo no conjunto convexo.

Definição 2.4.6 – (combinação convexa dos pontos extremos)

Dado os pontos extremos $x^1, x^2, \ldots, x^k$ e o polítopo S. Para todas $x \in S$, x pode ser escrito como combinação convexa dos pontos extremos $x^1, x^2, \ldots, x^k \left(x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\right)$.

***Definição* 2.4.7 —(Raio)**

(i). Um vetor $r \in \mathbb{R}^n$ é um raio de S se e só se para qualquer ponto $x \in S$, o conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n : y = \boldsymbol{x} + \lambda r, \lambda \geq 0\} \subseteq S$.

(ii). Um raio r de S é um raio extremo de S, se $r = \lambda r_1 + (1 - \lambda) r_2$, onde r_1 e r_2 são raios de S, então $r_1 = \lambda_1 r$ e $r_2 = \lambda_2 r$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

Exemplo 2.4.3.

S é um poliedro ilimitado (ver Figura – 8). Os vetores r_1 e r_2 são raios, isto é o conjunto de pontos da forma $\{y = \boldsymbol{x} + \lambda r, \lambda \geq 0\}$ pertence ao poliedro S. Os vetores r_1, r_2 são raios extremos do poliedro S.

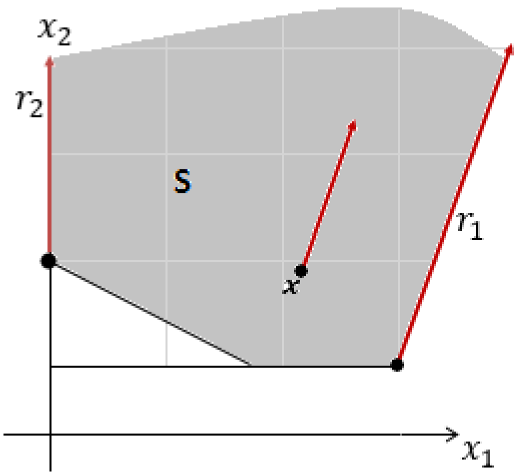

Figura 8: Ilustração os raios extremos de um poliedro.

2.5. Interpretação Geometria

2.5.1. Região admissível dos problemas de PL.

A resolução gráfica de problemas de programação linear só pode ser realizada quando não estão envolvidas mais de três variáveis decisão, e particularmente pode ser utilizada facilmente quando existem duas variáveis de decisão. Na resolução gráfica em $\mathbb{R}^2$ começamos por identificar a região admissível. (*ver* [1], [3], [4], [6], [7], [10], [11], [13],[19]).

O conjunto dos pontos que satisfazem a desigualdade da forma $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$, ou da forma $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$, onde pelo menos uma das constantes a_1 ou a_2 é diferente de zero, é denominado como semiplano. Portanto, uma reta divide o plano (espaço de dimensão 2) em duas regiões denominadas semiplanos.

Uma inequação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ representa o semiplano que inclui o conjunto dos pontos da reta $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, juntamente com os pontos que estão num dos lados da reta. Por exemplo, $20x_1 + 40x_2 \leq 800$ é o conjunto dos pontos que aparecem sombreados no gráfico na *Figura 9.*

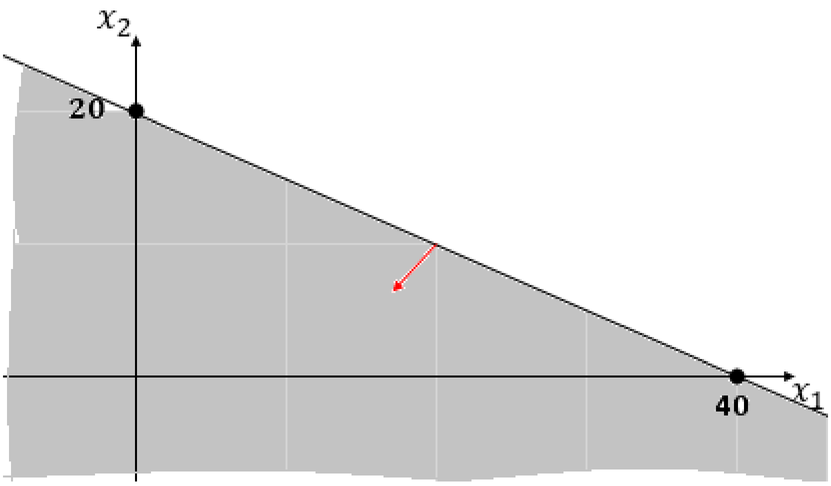

Figura 9: Exemplo do semiplano definido por $20x_1 + 40x_2 \leq 800$

Um semiplano é a representação gráfica de uma inequação linear em duas variáveis. A representação gráfica de um sistema de inequações lineares em duas variáveis será a interseção dos semiplanos correspondentes a cada inequação linear. As restrições de um problema de *PL* juntamente com as condições de não-negatividade formam um conjunto de semiplanos cuja intersecção determina um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$, denominado por *região das soluções admissíveis* ou, simplesmente, *região admissível*.

Definição 2.5.1

As soluções admissíveis são quaisquer especificações de valores para as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ que satisfaçam as restrições do problema e as condições de não negatividade.

Definição 2.5.2

Região admissível é o conjunto de todas as soluções admissíveis, ou seja, o conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições.

A região admissível define um poliedro. O poliedro é limitado (politopo), ilimitado ou vazio dependendo das restrições que o definem. Para mais detalhes, vamos considerar o exemplo seguinte.

***Exemplo 2.5.1*.**

Vamos verificar região admissível e solução ótima do problema no *Exemplo* 2.2.2.

Maximizar: $z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{llr}
s.\ a: & 20x_1 + 40x_2 \leq 800 & (1) \\
 & 15x_1 + 12x_2 \leq 450 & (2) \\
 & x_1 \qquad\qquad \leq 30 & (3) \\
 & \qquad\quad x_2 \leq 20 & (4) \\
 & x_1, \quad\; x_2 \geq 0 & (5)
\end{array}
$$

O *Exemplo* 2.2.2 tem somente duas variáveis de decisão, torna-se por isso possível resolvê-lo graficamente. A resolução gráfica dos problemas deste tipo inclui duas fases. Primeiro determina-se o conjunto das soluções admissíveis (designado por região admissível), constituído pelo conjunto dos pares ordenados "$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$" em que satisfazem todas as restrições "$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i$", restrições (1) -(4), e as condições de não negatividade "$x_j \geq 0$", restrições (5). Cada uma destas restrições define um semiplano em

$\mathbb{R}^2$. A região admissível pode ser vista, em termos geométricos, como o quadrilátero que resulta da interseção desses semiplanos. Assim, o conjunto das soluções admissíveis pode representar-se graficamente pelo quadrilátero ABDC ou politopo $\boldsymbol{S}$, mostrado na *Figura – 10.*

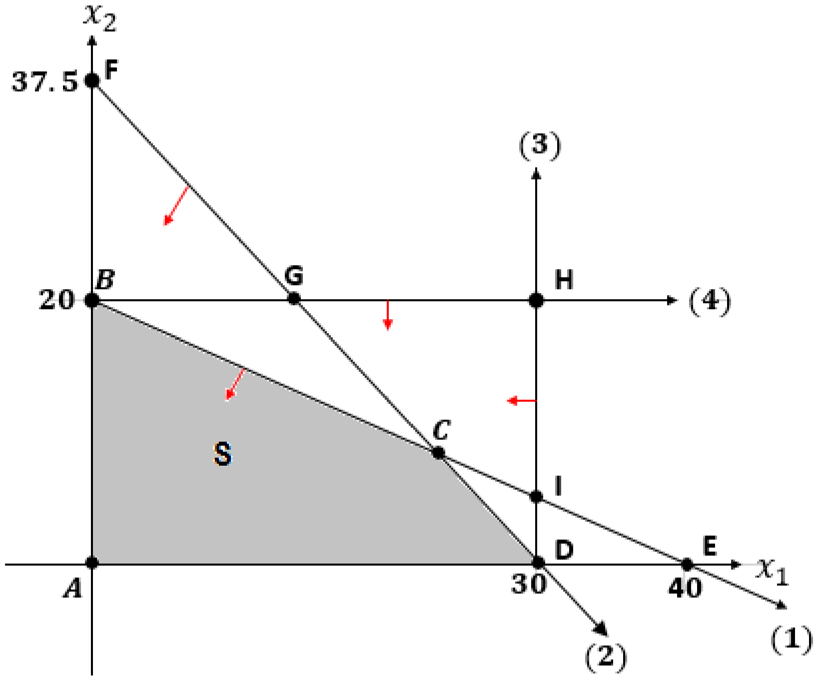

Figura 10: Quadrilátero ABCD (S) é um politopo

Uma vez determinada a região admissível do problema, passa-se à obtenção da solução ótima, isto é, à determinação dos pontos do quadrilátero ABDC que maximizam a função $\boldsymbol{z = x_1 + x_2}$, isto é, determinação dos pontos que maximizam a produção total.

A função objetivo é dado por: $\boldsymbol{z = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = z - x_1}$ que representa uma família de retas (uma para cada valor de $\boldsymbol{z}$) todas elas com o mesmo declive (– 1) e cuja ordenada na origem é $\boldsymbol{z}$. Assim, sendo a um maior valor de $\boldsymbol{z}$ corresponde a resolução do nosso problema consiste em encontrar a reta com declive (–1) de maior ordenada na origem e que tenha interseção não nula com o politopo $\boldsymbol{S}$. Das várias retas de declive (–1) a que tem maior ordenada na origem e inclui pontos em $\boldsymbol{S}$, é a que passa no ponto C. O ponto C é solução ótima neste problema com valor função objetivo dada 31.66, como se mostra na *Figura – 11*.

Logo, para maximizar a quantidade da produção total a empresa deve produzir 23.34 toneladas do tipo café robusta e 8.33 toneladas do tipo café arábica. Com este plano a empresa produz 31.66 toneladas. Note-se que o ponto C é uma única solução ótima.

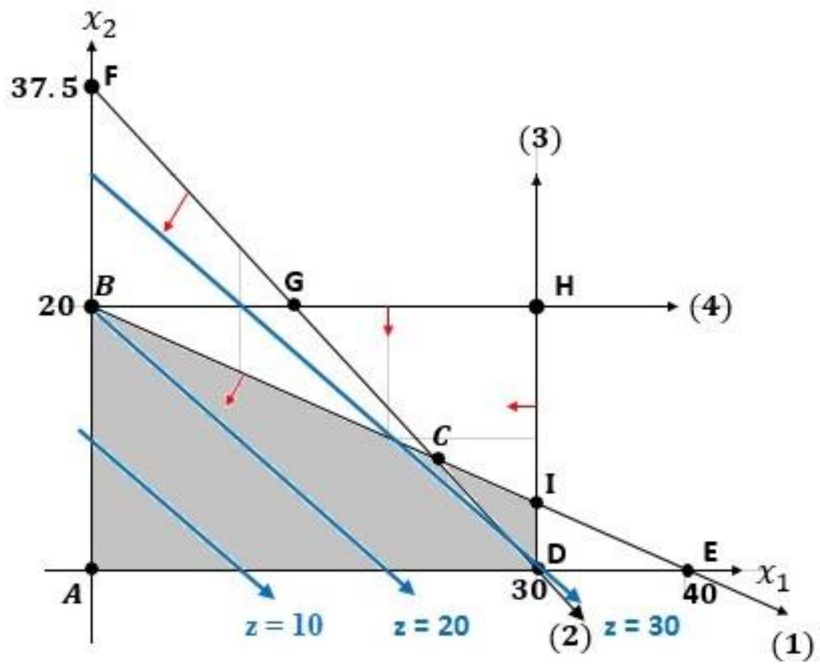

Figura 11: Ilustração a solução ótima do problema do Exemplo 2.2.2.

2.5.2. Casos particulares de problemas de PL

Nesta secção vamos descrever as várias situações que podem ocorrer na resolução de um problema de programação linear. As regiões admissíveis são poliedros e podem ser limitadas, ilimitadas ou vazias. Relativamente à região admissível e à solução ótima, podem ocorrer as situações seguintes:

(i). O conjunto das soluções admissíveis é limitado e existe uma única solução ótima (ocorre num ponto extremo).

(ii). O conjunto das soluções admissíveis é limitado e existe uma infinidade de soluções ótimas.

(iii). O conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e existe uma única solução ótima (ocorre num ponto extremo).

(iv). O conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e existe uma infinidade de soluções ótimas.

(v). O conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e o valor ótimo da função objetivo é infinito.

(vi). O conjunto das soluções admissíveis é vazio e o problema é impossível.

Em seguida, será apresentado geometricamente um exemplo de resolução gráfica de cada um dos casos.

(i). A região admissível limitada e existe uma única solução ótima

Na verdade, se um problema de programação linear tem uma única solução ótima finita, ela ocorre num ponto extremo do conjunto das soluções admissíveis, ver resolução gráfica (*Figura 11*) no *Exemplo 2.5.1*

(ii). A região admissível limitada e existe uma infinidade de soluções ótimas

Exemplo 2.5.2 Considere-se de novo o *Exemplo* 2.2.2.

Se o valor do coeficiente na função objetivo de variável x_2 for alterado de c_2 = 1 para c_2 = 2 e as restrições permanecerem inalteradas, então temos:

Maximizar: $z = x_1 + 2x_2$

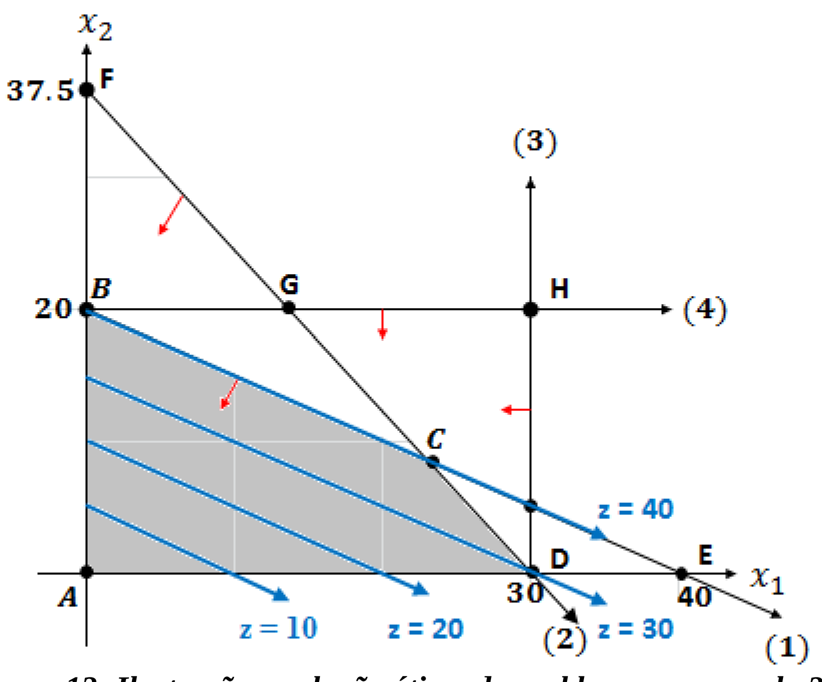

Figura 12: Ilustração a solução ótima do problema no exemplo 2.5.2

A região admissível é o mesmo politopo S e vamos determinar os pontos que maximizam essa função objetivo.

$z = x_1 + 2x_2 \Rightarrow x_2 = z - \frac{1}{2}x_1$, representa uma família de retas todas com o mesmo declive $\left(-\frac{1}{2}\right)$ e cuja ordenada na origem é z. Assim sendo, o maior valor de z corresponde à solução ótima do nosso problema. A resolução do problema consiste em encontrar a reta com declive $\left(-\frac{1}{2}\right)$ de maior ordenada na origem e que inclua algum ponto no politopo ***S***. Das várias retas de declive $\left(-\frac{1}{2}\right)$ a que tem maior ordenada na origem e inclui pontos em ***S***, é a que passa no segmento de reta $[BC]$.

Verificamos graficamente que o valor ótimo z = 40 é obtido para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pertencente ao segmento de reta $\overline{BC}$ que contém todos os pontos entre B e C. Logo, o problema tem várias soluções ótimas (uma infinidade de soluções). No caso apresentado na *Figura-12*, o conjunto de todas as soluções ótimas do problema é definido por:

$X^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) = \lambda B + (1-\lambda)C, \text{com } \lambda \in [0,1]\}$ e corresponde graficamente ao segmento de reta cujos extremos são B = $(0,20)$, C = $\left(\frac{70}{3}, \frac{25}{3}\right)$. Por exemplo, fazendo λ = $\frac{1}{7}$ obtemos o ponto (20, 10) = $\frac{1}{7}(0,20) + (1 - \frac{1}{7})\left(\frac{70}{3}, \frac{25}{3}\right)$. Logo, (20, 10) é uma combinação linear os pontos B e C, isto é, também é solução ótima do problema.

(iii). Conjunto das soluções admissíveis ilimitado e existe uma única solução ótima.

Deve salientar-se que o facto do conjunto das soluções admissível ser não limitado não implica necessariamente que a solução seja não limitada.

Exemplo 2.5.3 Considere-se o seguinte exemplo:

Maximizar: $z = 2x_1 - x_2$

s. a:

$$
\begin{array}{llr}
20x_1 + 40x_2 \geq 800 & & (1) \\
15x_1 + 12x_2 \geq 450 & & (2) \\
x_1 \leq 30 & & (3) \\
x_2 \geq 20 & & (4) \\
x_1, \quad x_2 \geq 0 & & (5)
\end{array}
$$

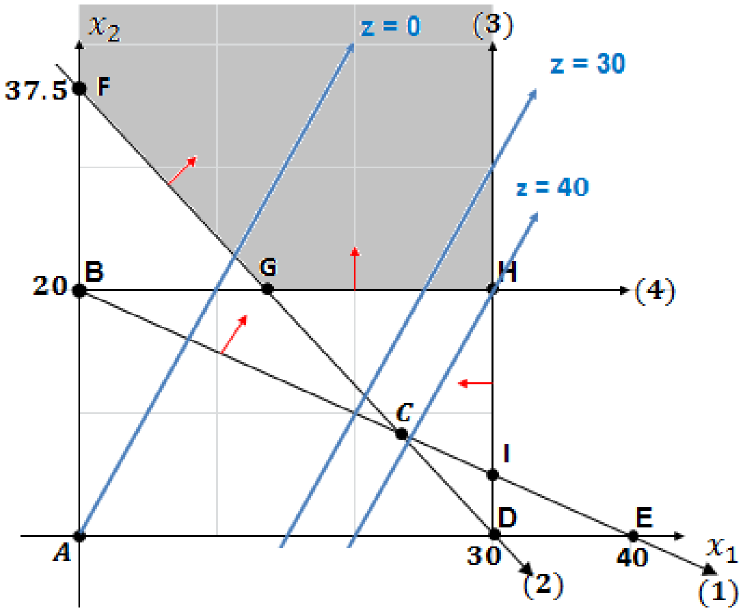

Figura 13: Ilustração a solução ótima do problema do Exemplo 2.5.3.

Na *Figura-13* encontra-se representada a região admissível, que é ilimitada, e as várias retas (denominadas retas de nível) com declive 2. A reta que tem maior ordenada na origem e interseta a região admissível é a que passa no ponto H. Portanto, o ponto H é a única solução ótima deste problema com valor função objetivo $z = 40$.

(iv). Região admissível ilimitada com uma infinidade de soluções ótimas.

Pode acontecer que o conjunto das soluções seja não limitado e o valor ótimo de z seja finito, com variáveis a poderem assumir valores arbitrariamente grandes na solução ótima. Neste caso, existem soluções ótimas alternativas, como se ilustra através do seguinte problema:

Exemplo 2.5.4 – Considere-se o seguinte problema:

Maximizar: $z = 2x_1 - x_2$

s. a:	$20x_1 + 40x_2 \geq 800$	(1)
	$15x_1 + 12x_2 \geq 450$	(2)
	$2x_1 - x_2 \leq 20$	(3)
	$x_2 \geq 20$	(4)
	$x_1, \quad x_2 \geq 0$	(5)

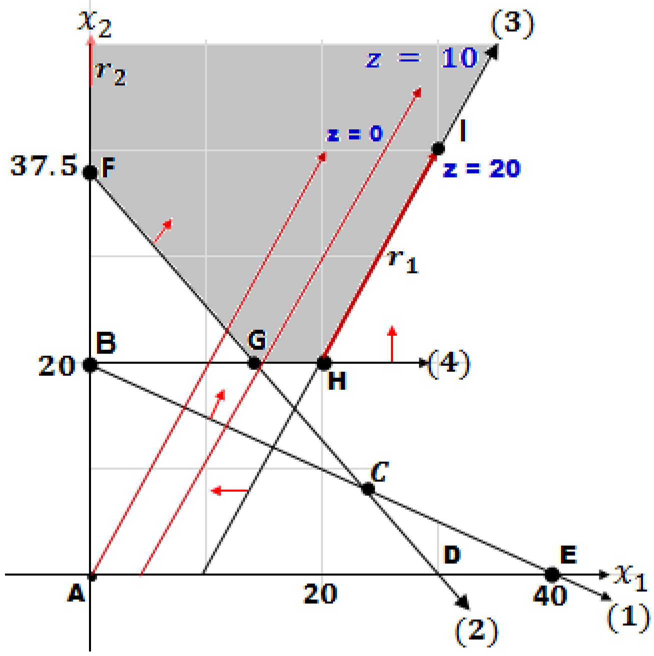

Figura 14: Ilustração a solução ótima do problema no exemplo 2.5.4

A representação gráfica encontra-se na *Figura-14*. O valor máximo da função objetivo é 20. Qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ da semi-reta com ponto extremo H e de raio $\boldsymbol{r_1}$ conduz a um valor de z = 20 e é, portanto, solução ótima do problema. É evidente, como se pode ver pela figura em cima, que embora a função objetivo não possa exceder o valor 20, as variáveis x_1 e x_2 podem assumir valores arbitrariamente grandes. Trata-se da semi-reta $2x_1 - x_2 = 20$ cuja extremidade inicial é o ponto extremo (20, 20). O conjunto das soluções ótimas é dado por: $X^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) = H + \lambda(10, 20), \text{com } H = (20,20) \text{ e } \lambda \geq 0\}$.

(v). Região admissível ilimitada e valor ótimo da função objetivo é infinito.

Exemplo 2.5.5 Considere-se o seguinte problema:

Maximizar: $z = x_1 + x_2$

s. a:	$20x_1 + 40x_2 \geq 800$	(1)
	$15x_1 + 12x_2 \geq 450$	(2)
	$x_1 \leq 30$	(3)
	$x_2 \geq 20$	(4)
	$x_1, \quad x_2 \geq 0$	(5)

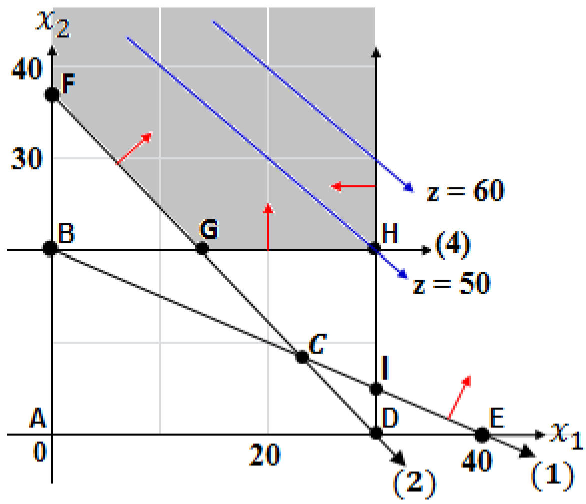

Figura 15: Ilustração do problema no exemplo 2.5.5.

A região admissível é ilimitada e a função objetivo pode crescer indefinidamente, atendendo a todas as restrições do problema, e, portanto, não existe um valor máximo para a função objetivo. O Exemplo 2.5.5 ilustra essa condição. Logo, o problema é ilimitado e não existe uma solução ótima.

(vi). Problema impossível (a região admissível é vazia).

Exemplo 2.5.6 Considere-se o seguinte problema:

Maximizar: $z = x_1 + x_2$

s. a:

$$20x_1 + 40x_2 \leq 800 \quad (1)$$
$$15x_1 + 12x_2 \leq 450 \quad (2)$$
$$x_1 \geq 30 \quad (3)$$
$$x_2 \geq 20 \quad (4)$$
$$x_1, \quad x_2 \geq 0 \quad (5)$$

O conjunto dos pares ordenados $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem todas as restrições é vazio, isto é, não existe nenhum par ordenado que satisfaça todas as restrições. O problema é impossível.

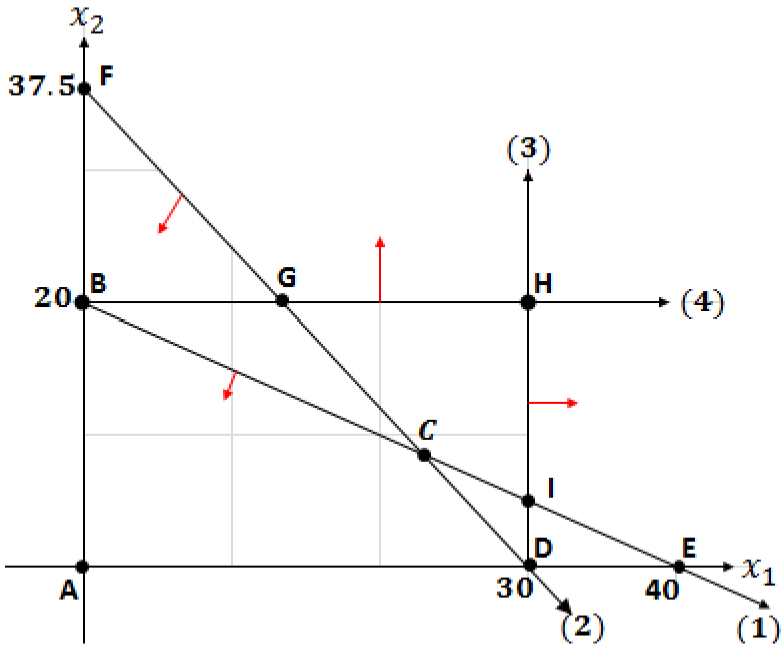

Figura 16: Ilustração do problema do Exemplo 2.5.6

Exercícios –

1. Verifique quais dos seguintes conjuntos são convexos:
   a. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq 4\}$.
   b. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq -1\}$.
   c. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 \leq 1, 2x_1 + x_3 \leq 2\}$.
   d. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2 = 4\}$.
   e. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 \leq 2x_1^2, x_1 + x_2 + x_3 \leq 6\}$.
   f. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 2\}$.
   g. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1, |x_2| \leq 6\}$.
   h. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = |x_2|,\ x_3 \leq 2\}$.

2. Verifique quais dos seguintes conjuntos são poliedros e determine todos os pontos extremos do respetivo poliedro. Será que o poliedro possui algum raio extremo? Justifique.
   a. $\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \geq 1, x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
   b. $\{(x_1, x_2) : x_1 \leq 2, x_1 + x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
   c. $\{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 3x_2 \geq 9, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
   d. $\{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 \leq x_1^2, x_2 - 2x_3 \geq 1, x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
   e. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
   f. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1, |x_2| \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
   g. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = |x_2|,\ x_1 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

3. Considere os conjuntos

   $X_1 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 \leq 10, x_1 + 2x_2 \leq 12, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

   $X_2 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 - x_2 \geq -2, -x_1 + 2x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

   Indique pontos extremos e as direções extremas dos conjuntos X_1 e X_2

4. Represente graficamente o conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b};\ x_1, x_2 \geq 0\}$, onde $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b}$ são como dados abaixo. Em cada caso, identifique se se trata de um politopo, um poliedro, vazio ou não.
   a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

c. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. Considere a seguinte problema de programação linear (PL).

Max: $z = 2x_1 + x_2$

s. a: $x_1 - 2x_2 \leq 2$ (1)

$5x_1 - 2x_2 \geq 25$ (2)

$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$ (3)

$4x_1 + 3\,x_2 \leq 76$ (4)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (5)

a. Esboce a região amissível no espaço das variáveis $\{x_1, x_2\}$ e identifique a solução ótima.
b. Identifique todos os pontos extremos e reformule o problema em termos da combinação convexa dos pontos extremos. Resolva o PL resultante.
c. Retire a quarta restrição ao PL. Identifique os pontos extremos e as direções extremas e reformule o problema em termos da combinação convexa dos pontos extremos e da combinação não negativa das direções extremas. Resolva o PL resultante e interprete a solução.

6. Considere a seguinte programação linear (PL).

Min: $z = 2x_1 + x_2$

s. a: $x_1 - 3x_2 \leq 6$ (1)

$x_1 + 2x_2 \geq 12$ (2)

$5x_1 - 7x_2 \geq -35$ (3)

$3x_1 - x_2 \geq -3$ (4)

$x_1, \quad x_2 \geq 0$ (5)

a. Esboce a região amissível no espaço das variáveis $\{x_1, x_2\}$ e identifique a solução ótima.
b. Identifique todos os pontos extremos e reformule o problema em termos da combinação convexa dos pontos extremos. Resolva o PL resultante.
c. Retire a quarta restrição ao PL. Identifique os pontos extremos e as direções extremas e reformule o problema em termos da combinação convexa dos pontos

extremos e da combinação não negativa das direções extremas. Resolva o PL resultante e interprete a solução.

7. Considere a seguinte problema de programação linear (PL).

Max: $z = x_1 + 3x_2$

s. a: $2x_1 + 5x_2 \leq 32$ (1)

$x_1 - \quad x_2 \leq 9$ (2)

$2x_1 - 7x_2 \leq 14$ (3)

$3x_1 - \quad x_2 \geq -3$ (4)

$x_1, \quad x_2 \geq 0$ (5)

a. Identifique os pontos extremos deste problema e, obtendo o valor da função objetivo em todos os pontos extremos, encontre a sua solução ótima.

b. Substitua a primeira restrição pela seguinte restrição $x_1 + 6x_2 \geq 24$. Encontre a solução ótima, se for possível, se não explique porquê.

8. Resolva graficamente cada um dos seguintes problemas de programação linear e identifique a região admissível sombreada, os pontos extremos e a solução ótima, as direções extremas.

a. *Max*: z = 4 x_1+ $5x_2$

s. a: $4x_1 + \ 3x_2 \leq 10$

$4x_1 + 10x_2 \leq 20$

$x_1, \qquad x_2 \geq 0$

b. *Max*: z = 2 x_1+ $4x_2$

s. a: $2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$x_1 + 2x_2 \geq 7$

$x_1, \quad x_2 \geq 0$

c. *Min*: z = $x_1 - x_2$

s. a: $x_1 \leq 2x_2$

$x_1 \quad \leq 3$

$x_1, \ x_2 \geq 0$

d. *Max*: z = $-3x_1$+ $2x_2$

s. a: $-x_1 + 2x_2 \leq 2$

$x_2 \leq 4$

$x_1, \quad x_2 \geq 0$

e. *Max*: z = $2x_1$+ $3x_2$

s. a: $-x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1 + 3x_2 \leq 9$

$x_1, \quad x_2 \geq 0$

f. *Min*: z = 15 x_1+ $20x_2$

s. a: $x_1 + 2x_2 \geq 10$

$2x_1 - 3x_2 \leq 6$

$x_1 + \ x_2 \geq 6$

$x_1 \geq 0$ e $x_2 \in \mathbb{R}$

g. *Min*: z = $3x_1$+ $2x_2$

s. a: $x_1 + 2x_2 \geq 12$

$2x_1 + 3x_2 = 12$

$2x_1 + \quad x_2 \geq \ 8$

$x_1 , \quad x_2 \geq 0$

Capítulo 3

3. Método Simplex

3.1. Introdução

Como se verificou no subtópico (***2.5***), é possível resolver graficamente os problemas de Programação Linear quando não estão envolvidas mais de três variáveis decisão. É importante encontrar processos que sejam suficientemente abrangentes que permitam a resolução de problemas quaisquer que sejam as suas dimensões, quer ao nível do número de variáveis, quer ao nível do número de restrições envolvidas. Um desses processos, que se deve a George B. Dantzing, é designado por método simplex, [3]. O método simplex é um método iterativo que percorre os pontos extremos do conjunto de soluções admissíveis do problema. Este método é formado por um grupo de critérios para escolha de soluções básicas que melhorem o valor da função objetivo, e também de um teste de otimalidade.

Neste subtópico, vai ser apresentada a forma habitual do algoritmo primal do simplex e será feita referência à sua forma revista, (*ver* [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [17], [19]). A melhor forma de iniciar o estudo este método é através de exemplo simples seguinte.

Exemplo 3.1.1 considere-se o P.L (com três variáveis e duas restrições)

$$\begin{array}{ll} Max: & z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ s.\ a: & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{array} \qquad (\textbf{\textit{3.1}})$$

O primeiro passo neste método consiste em escrever o modelo na forma padrão através da introdução de varáveis de folga.

$$\begin{array}{ll} Max: & z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s. a:} & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 12 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 \quad = 10 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \quad \geq 0 \end{array} \qquad (\textbf{\textit{3.2}})$$

Em termos matriciais (***2.9***) - (***2.11***), temos:

$$\begin{aligned} max: \quad & z = c^t x \\ s.a: \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (\textbf{\textit{3.3}})$$

Onde, $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^t$, $c^t = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0]$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$

Definição 3.1.1

Considerando-se o sistema $\boldsymbol{Ax = b}$, definido em **(*3.3*)** e $A_B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, uma sub-matriz base de $\boldsymbol{A}$, então, as variáveis associadas à submatriz $A_B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, são denominadas por variáveis básicas. Definida a sub-matriz A_B , as restantes colunas em $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ formam uma sub-matriz designada por sub-matriz não básica, denotada $A_N \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. As variáveis associadas a esta sub-matriz A_N são denominadas por variáveis não básicas.

É de referir que temos 2 restrições e 5 variáveis. O sistema vai ser possível e indeterminado. Para obtermos uma solução vamos fixar 3 variáveis a zero (são as chamadas variáveis não básicas), para simplificar, vamos considerar x_1, x_2 e x_3, e resolver o sistema em relação às restantes (variáveis básicas), x_4 e x_5. Deste modo a matriz A pode ser separada em duas partes. É de referir que a parte relativa às variáveis básicas tem de formar uma base, $A_B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, onde $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,. A parte restante, constituída pelas colunas variáveis não básicas é $A_N \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, onde $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Temos, portanto, que

$$A = [A_B \quad A_N] \qquad (\textbf{\textit{3.4}})$$

De acordo com esta divisão (3.4), dividimos também as variáveis em x_B e x_N onde $x_N = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^t$ e $x_B = [x_4 \quad x_5]^t$, temos, portanto, que

$$x = [x_B \quad x_N]^t \qquad (\textbf{\textit{3.5}})$$

3.2. Soluções Básicas Admissível, Pontos Extremos e Otimalidade

Considere-se o problema de Programação Linear na forma standard matricial e recordemos que as soluções ótimas de um problema de Programação Linear estão relacionadas com os pontos ou raios extremos do poliedro definido pelo conjunto de restrições, temos:

$$\begin{aligned} min/max: &\quad z = c^t x \\ s.a \quad\quad : &\ Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Onde, $A \in \mathbb{R}^{m\times(m+n)}$ é a matriz dos coeficientes das incógnitas das restrições (sendo m o numero de restrições e n o numero de variáveis),

$x \in \mathbb{R}^{(m+n)\times 1}$ é o vetor coluna das incógnitas,

$b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ é vetor dos termos independentes das restrições,

$c^t \in \mathbb{R}^{1\times(m+n)}$ é o vetor-linha dos coeficientes das correspondentes.

Consideramos que a Car $(A|b)$= Car (A) = m, isto é o número de linhas/colunas linearmente independentes na matriz A é m, igual ao número de restrições. Considere-se matriz A, $A = [A_B \quad A_N]$ no sentido (***3.4***). Esta divisão permite efetuar uma classificação das variáveis em básicas (as correspondentes às colunas da sub–matriz $A_B \in \mathbb{R}^{m\times m}$) e as variáveis não básicas (as restantes $n - m$ variáveis) correspondentes às colunas de $A_N \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$.

Temos, portanto, que:

- A_B é a matriz básica (das colunas básicas)
- A_N é a matriz não básica (das colunas não básicas)

O vetor das variáveis x, tal como em (***3.5***), pode ser escrito na forma $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ onde x_B é o vetor das *variáveis básicas* correspondentes às colunas de A_B e x_N é o vetor das *variáveis não básicas* correspondentes às colunas de A_N.

O sistema $Ax = b$, pode ser reescrito do seguinte modo:

$Ax = b \Leftrightarrow [A_B \quad A_N]\,[x_B \quad x_N]^t = b$

$\Leftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = b$

$\Leftrightarrow x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$ (porque A_B é invertível) (***3.6***)

Temos, portanto, que:

- Se $x_N = \mathbf{0}$, então $x_B = A_B^{-1} b$ e $x = (x_B, \mathbf{0})$ é chamada *solução básica* do sistema $Ax = b$.
- Se $x_B \geq 0$, dizemos que a solução básica $x = (x_B, \mathbf{0})$ é admissível.

Notamos que a decomposição $A = [A_B \quad A_N]$ não é única, pois podemos ter tantas matrizes $A_B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, quantas as combinações de todos os n $+m$ colunas em grupos de m colunas, num total de C_m^{n+m} matrizes. Este número C_m^{n+m} corresponde ao número máximo de bases que poderemos vir a ter, pois nem todas as sub-matrizes que podem ser formadas serão constituídas por colunas linearmente independentes e a sub-matriz pode, portanto, não ser invertível e, portanto, não será uma base. Uma vez que uma solução básica admissível corresponde a um ponto extremo do conjunto ***S*** das soluções admissíveis de um problema de programação linear, este tem um número finito de pontos extremos.

Exemplo 3.2.1 (Solução básica admissível "*SBA*")

Considere o seguinte politopo P (ver *Figura-17*):

$P = \{x_1 + x_2 \leq 5,\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

Ao introduzir as variáveis de folga x_3 e x_4, o conjunto é colocado na forma padrão seguinte:

$Q = \{x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\}$

Note que a matriz dos coeficientes das restrições é dada por:

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A cada solução básica admissível corresponde a uma base $A_B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A_B^{-1} b$ é não negativo. De seguida apresentam-se as formas possíveis de extrair A_B de A.

$C_2^4 = 6$ corresponde ao número máximo de bases.

(i). $A_B = [a_1 \ \ a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ii). $A_B = [a_1 \ \ a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(iii). $A_B = [a_1 \ \ a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(iv). $A_B = [a_2 \ \ a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(v). $A_B = [a_2 \ \ a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(vi). $A_B = [a_3 \ \ a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}, \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

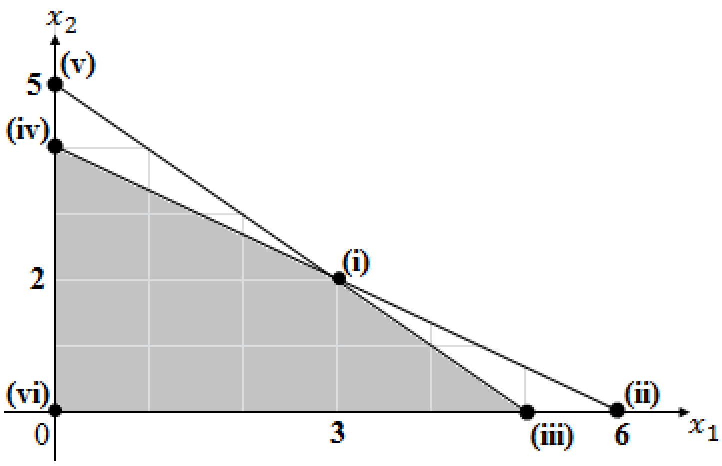

Figura 17: Ilustração SBA no exemplo 3.2.1

Note que as soluções obtidas em (***i***), (***iii***), (***iv***), (***vi***) são soluções básicas admissíveis, enquanto que as soluções obtidas em (***ii***) e (***v***) são soluções básicas não admissíveis. Na

Figura 17 pode ver-se o ponto extremo correspondente a cada uma das soluções básicas admissíveis.

Considere-se o problema de programação linear no *Exemplo 3.2.1* onde o objetivo é maximizar a função: z = 9x_1+11x_2

Na forma vetorial as restrições são dadas por:

$$x_1 \overbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}^{a_1} + x_2 \overbrace{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}}^{a_2} + x_3 \overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}^{a_3} + x_4 \overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}^{a_4} = \overbrace{\begin{bmatrix}5\\12\end{bmatrix}}^{b} \qquad (\boldsymbol{3.7})$$

Como já se viu (Figura 17) ao ponto (vi) corresponde a solução básica admissível

$x_B = $ (0,0,5,12), tendo-se

$$b = 5a_3 + 12a_4 \qquad (\boldsymbol{3.8})$$

Expressam-se os cinco vetores envolvidos em termos desta base:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1a_3 + 2a_4 \\ a_2 &= 1a_3 + 3a_4 \\ a_3 &= 1a_3 + 0a_4 \\ a_4 &= 0a_3 + 1a_4 \end{aligned}$$

Como os vetores a_3, a_4 são vetores linearmente independentes, constituem uma base de $\mathbb{R}^2$, então quer dizer que qualquer vetor de entre os n dados, neste caso n=5, se pode obter como combinação linear dos vetores da base, tendo-se

$$a_j = \alpha_{1j}a_1 + \alpha_{2j}a_2 + \cdots + \alpha_{mj}a_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\, a_i,\ j \ = \ 1, 2, \ldots, n \qquad (\boldsymbol{3.9})$$

Os vetores fora da base, neste caso a_1 e a_2 , têm pelo menos uma componente positiva na sua expressão em termos dos vetores da base, podendo, pois, qualquer um deles ser escolhido para entrar na base. Por exemplo, escolha-se o vetor a_1:

$$a_1 = \underbrace{1}_{\alpha_{31}}\, a_3 + \underbrace{2}_{\alpha_{41}}\, a_4 \qquad (\boldsymbol{3.10})$$

Recordamos que quando a solução ótima de um problema de programação linear existe, então um ponto extremo ótimo também existe.

Definição 3.2.1

Seja o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$ com $m \leq n$. x será um ponto extremo de S se possuir $n - m$ variáveis nulas.

Teorema 3.2.1

Toda a solução básica do sistema $Ax = b$ com $x \geq 0$ é um ponto extremo do conjunto de soluções básicas admissíveis de $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$.

Demonstração.

Seja $\bar{x}$ uma solução básica associada a uma sub-matriz básica $A_B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Então, sem perda de generalidade, suponha que, $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix}$, com $\bar{x}_N = 0$

para $i = m + 1, \ldots, n$. Por contradição, suponha que $\bar{x}$ não seja ponto extremo S, então $\exists\ \bar{x}^1, \bar{x}^2 \in S$ tais que, para algum λ, $0 \leq \lambda \leq 1$

$\bar{x} = \lambda\bar{x}^1 + (1-\lambda)\bar{x}^2$ e $\bar{x}^1 \neq \bar{x}^2$ pois $\bar{x} \neq 0$

Como $\bar{x}_i = 0$, para $i = m + 1, \ldots, n$, então, atendendo a que $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \geq 0$,

$\begin{cases} \lambda\bar{x}_i^1 = 0 \\ (1-\lambda)\bar{x}_i^2 = 0 \end{cases}$ para $i = m + 1, \ldots, n$, o que implica $\begin{cases} \bar{x}_i^1 = 0 \\ \bar{x}_i^2 = 0 \end{cases}$ para $i = m + 1, \ldots, n$.

Logo, $\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_B^1 \\ \bar{x}_N^1 \end{bmatrix}$ e $\bar{x}^2 = \begin{bmatrix} \bar{x}_B^2 \\ \bar{x}_N^2 \end{bmatrix}$. Como $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in S$, as seguintes relações são validas:

$$\begin{matrix} A\bar{x}^1 = b \\ \bar{x}^1 \geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A\bar{x}^2 = b \\ \bar{x}^2 \geq 0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A_B\bar{x}_B^1 = b \\ A_B\bar{x}_B^2 = b \end{cases}$$

Se $\bar{x}$ for um ponto extremo de S, então não existem $\bar{x} = \lambda\bar{x}^1 + (1-\lambda)\bar{x}^2$.

$$A_B\bar{x}_B^1 - A_B\bar{x}_B^2 = b - b$$
$$A_B(\bar{x}_B^1 - \bar{x}_B^2) = 0$$

Mas, $\bar{x}_B^1 \neq \bar{x}_B^2$ e então $\bar{x}_B^1 - \bar{x}_B^2 \neq 0 \Rightarrow A_B = 0$, o que é uma contradição, pois por hipótese A_B é uma sub-matriz base e, portanto, não singular!

Logo, não existem $\bar{x} = \lambda\bar{x}^1 + (1-\lambda)\bar{x}^2$.

$\therefore$ Toda solução básica do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto de soluções admissíveis de S. ■

Teorema 3.2.2

Se um problema de programação linear admite solução ótima, então pelo menos um ponto extremo do conjunto de pontos admissíveis é uma solução ótima do problema (mostra-se este teorema admitindo-se que o conjunto $\boldsymbol{S}$ é Politopo).

Prova:

Sejam $x^1, x^2, \dots, x^P$ os pontos extremos do conjunto S. Então, pela definição (***2.4.6***), para todos $x \in S$, x pode ser escrito como combinação convexa dos pontos extremos $x^1, x^2, \dots, x^P$ de S, ou seja $x = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i x^i$ e $\sum_{i=1}^{P} \lambda_i = 1$.

Logo, $c^t x = c^t\left(\sum_{i=1}^{P} \lambda_i x^i\right) = \lambda_1 c^t x^1 + \lambda_2 c^t x^2 + \dots + \lambda_P c^t x^P$.

Seja x^* um ponto extremo tal que $c^t x^* \leq c^t x^i, (i = 1, \dots P)$.

Mas $c^t x = \lambda_1 c^t x^1 + \lambda_2 c^t x^2 + \dots + \lambda_P c^t x^P \geq \lambda_1 c^t x^* + \lambda_2 c^t x^* + \dots + \lambda_P c^t x^*$

$= \sum_{i=1}^{P} \lambda_i c^t x^* = c^t x^*$. Então $c^t x^* \leq c^t x$ para todo $x \in S$.

$\therefore$ x^* é um ponto extremo e é solução ótima do problema. ■

O valor ótimo de um problema de programação linear se existe e é finito, é atingido num ponto extremo do conjunto S das soluções admissíveis e corresponde a uma solução básica admissível. Qualquer combinação linear convexa de soluções ótimas é ainda uma solução ótima e se um problema de programação linear possuir mais do que uma solução ótima, então possui uma infinidade de soluções ótimas (*Ver Exemplo* 2.5.2).

3.3. Motivação Geométrica e o Algoritmo Simplex

As soluções ótimas de um PL são atingidas num ponto extremo, pelo que interessa agora saber como, de entre todos os pontos extremos do conjunto ***S*** das soluções admissíveis, identificamos a ótima.

Considerando que a função objetivo $z = c^t x = c_B^t x_B + c_N^t x_N$ (***3.5***), tendo em conta que se a solução é básica, associada à base A_B (***3.6***), temos

$$z = c_B^t(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N^t x_N$$

$$= c_B^t A_B^{-1} b - (c_B^t A_B^{-1} A_N - c_N^t)\, x_N \qquad \textbf{(3.11)}$$

Se for possível melhorar o valor do ponto extremo atual é identificada uma variável de entrada e outra de saída da base, desta forma muda-se de um ponto extremo para outro ponto extremo adjacente com melhor valor da função objetivo. O algoritmo do simplex examina os pontos extremos até encontrar aquele que seja melhor que os dois pontos extremos adjacentes (que é o que otimiza o valor da função objetivo), ou então até determinar que a solução ótima ocorre ao longo de uma direção extrema ou que o problema não tem solução ótima finita.

Consideremos uma qualquer solução básica $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, associada à base A_B (**3.6**). Para ser admissível, terá de ser tal que $x_B \geq 0, x_N \geq 0$. Sendo a_j a coluna de A associada a variáveis não básicas x_j. Para o valor da função objetivo (***3.11***), nessa solução, temos

$$z = c_B^t A_B^{-1} b - \sum_{j\in J}(c_B^t A_B^{-1} a_j - c_j)x_j$$

$$= c_B^t A_B^{-1} b - \sum_{j\in J}(z_j - c_j)x_j \qquad \textbf{(3.12)}$$

Onde $z_j = c_B^t A_B^{-1} a_j$ para cada variável não-básica e J é o conjunto dos índices das variáveis não-básicas.

Portanto o problema de programação linear, pode ser reescrito do seguinte modo

$$\begin{aligned} \min(\max): \quad & z = c_B A_B^{-1} b - \sum_{j\in J}(z_j - c_j)x_j \\ s.a \quad & x_B = A_B^{-1} b - \sum_{j\in J} A_B^{-1} a_j x_j \\ & x_j \geq 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.13)}$$

Pelo que, num problema otimização do PL:

(i). O valor: $z_j - c_j = (c_B A_B^{-1} a_j - c_j)$ chamamos custo reduzido da variável x_j.

(ii). Para um problema de maximização: se $z_j - c_j \geq 0$, para todo $j \in J$, então $x_j = 0$ para todo $j \in J$ e $x_B = A_B^{-1} b$ é a solução básica admissível ótima.

(iii). Para um problema de minimização: se $z_j - c_j \leq 0$, para todo $j \in J$, então a solução básica admissível é ótima.

(iv). Caso contrário (problema minimização), se $z_k - c_k \geq 0$ para alguma variável não básica x_k, então x_k pode aumentar de valor e melhorar (diminuir) o valor da função objetivo. Agora, fixando $x_j = 0$ para $j \in J \backslash \{k\}$ obtemos, pelas equações (***3.12***) e (3.13), que $z = c_B A_B^{-1} b - (z_k - c_k) x_k$ e

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = A_B^{-1} \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{rk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} x_k \right).$$

Se $A_B^{-1} a_{ik} \leq 0$, então, então x_{B_i} aumenta à medida que x_k aumenta. Para determinar o novo valor de x_k temos de atender que ao aumentar x_k as variáveis básicas x_{B_i} tais que $A_B^{-1} a_{ik} \geq 0$ vão diminuir de valor. Assim, de modo a garantir que as variáveis básicas sejam não negativas, a variável x_k pode aumentar de valor até uma variável básica x_{B_r} tomar valor zero, ou seja, x_k aumenta até $x_k = \frac{b_r}{a_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\}$ quando $a_{ik} > 0$.

Resumimos a forma quadro do método simplex abaixo e, ao mesmo tempo, Descreva brevemente a sua aplicação ao problema no *exemplo 3.1.1*.

Forma de algébrica	x_B	Coeficiente de						b
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$s.\ a$: $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12$	x_4	0	1	3	1	1	0	12
$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10$	x_5	0	2	– 1	2	0	1	10
Max: $z - x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$		1	–1	–2	–2	0	0	0

Tabela 7:Quadro inicial do método simplex

Vamos, agora, relacionar soluções básicas admissíveis de um sistema e pontos extremos de um poliedro.

Teorema 3.3 (Critério otimalidade)

Se para alguma *Solução Básica Admissível* (SBA) de um problema de maximização se verificar $c_j - z_j = c_j - c_B A_B^{-1} a_j \leq 0$, $\forall j$, j = *1*, 2, …, *n*, então essa *SBA* é a solução ótima.

Demonstração.

Seja $\boldsymbol{a_r}$ um vetor fora da base em condições de substituir um vetor da base, (isto é, com pelo menos uma componente positiva, $x_{ir} > 0$, na sua expressão em termos dos vetores da base, $a_r = x_{1r}a_1 + x_{2r}a_2 + \cdots + x_{mr}a_m$), tal que:

$$z_r = c_1 x_{1r} + \cdots + c_m x_{mr} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ir} \qquad \textbf{(3.14)}$$

Vamos supor o caso de um problema de maximização em que

$x_B^* = [x_{1B}, x_{2B}, \dots, x_{mB}, 0, \ \dots, 0]^t$ é uma SBA, que verifica $c_j - z_j \leq 0, \forall j$, e a que corresponde o valor da função objetivo

$$z^* = c_1 x_{1B} + c_2 x_{2B} + \cdots + c_m x_{mB} \qquad \textbf{(3.15)}$$

Vamos tomar uma qualquer solução básica admissível, $y_B^* = [y_{1B}, \ y_{2B}, \dots, y_{nB}, 0, \ \dots, 0]^t$ e com valor para a função objetivo dado por:

$$z^y = c_1 y_{1B} + c_2 y_{2B} + \cdots + c_n \, y_{nB} \qquad \textbf{(3.16)}$$

O teorema fica demonstrado desde que se prove que $z^* \geq z^y$.

Dada a admissibilidade de y, verifica-se

$$b = y_{1B} a_1 + y_{2B} a_2 + \cdots + y_{nB} a_n \qquad \textbf{(3.17)}$$

Atendendo a que (***veja* (3.9)**) $a_j = \sum_i \alpha_{ij} a_i$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, e a_j são vetores linearmente independentes (***veja* (3.7)**), após substituição em (3.***17***), vem

$$b = y_{1B}\left(\sum_i \alpha_{i1} a_i\right) + y_{2B}\left(\sum_i \alpha_{i2} a_i\right) + \cdots + y_{nB}\left(\sum_i \alpha_{in} a_i\right)$$

Agrupando nesta expressão os termos $a_1, a_2, \dots, a_m$, obtém-se

$$b = \left(\sum_j y_{jB}\alpha_{1j}\right)a_1 + \left(\sum_j y_{jB}\alpha_{2j}\right)a_2 + \cdots + \left(\sum_j y_{jB}\alpha_{mj}\right)a_m \qquad (\textbf{\textit{3.18}})$$

Por outro lado, por hipótese, $c_j - z_j \leq 0, \forall j$, pelo que substituindo c_j por z_j em (***3.16***) e atendendo a (***3.14***), tem-se sucessivamente

$z_1 y_{1B} + z_2 y_{2B} + \cdots + z_n y_{nB} \geq z^y$ e

$\sum_i (c_i \alpha_{i1}) y_{1B} + \sum_i (c_i \alpha_{i2}) y_{2B} + \cdots + \sum_i (c_i \alpha_{in}) y_{nB} \geq z^y$

Agrupando nesta expressão os termos em $c_1, c_2, \dots, c_m$, obtém-se

$$c_1 \sum_j \left(y_{jB}\alpha_{1j}\right) + c_2 \sum_j \left(y_{jB}\alpha_{2j}\right) + \cdots + c_m \sum_j \left(y_{jB}\alpha_{mj}\right) \geq z^y \qquad (\textbf{\textit{3.19}})$$

Tendo agora presente que X_B^* é uma SBA, verifica-se

$$b = x_{1B}^* a_1 + x_{2B}^* a_2 + \cdots + x_{mB}^* a_m \qquad (\textbf{\textit{3.20}})$$

Ora, $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ constitui uma base e sabe-se que a representação de qualquer vetor em termos da base é única, pelo que comparando (**3.*18***) e (**3.*20***) se conclui

$\sum_j y_{jB}\alpha_{1j} = x_{1B}^*,\ \sum_j y_{jB}\alpha_{2j} = x_{2B}^*, \dots,\ \sum_j y_{jB}\alpha_{mj} = x_{mB}^*$

Logo, (***3.19***) é equivalente a $c_1 x_{1B}^* + c_2 x_{2B}^* + \cdots + c_m x_{mB}^* \geq z^y$, ou por (***3.15***), $z^* \geq z^y$ e o teorema esta demonstrado. ■

Exemplo 3.3.1 (Melhorando solução básica admissível)

Considere o problema de programação linear do *Exemplo* (***3.2.1***) com a função objetivo dada por: *Max.* $z = x_1 + x_2$

Ao introduzir as variáveis de folga x_3 e x_4, o problema é colocado na forma padrão. Obtemos a seguinte matriz dos coeficientes das restrições A:

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere a solução básica admissível corresponde a $A_B = [a_2 \quad a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, x_2, x_3 são variáveis básicas enquanto x_1 e x_4 não são variáveis básicas.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este ponto encontra-se identificado na *Figura 18*. A fim de melhorar a solução básica admissível, vamos determinar os custos reduzidos $z_j - c_j$ para as variáveis não básicas.

$$z_1 - c_1 = c_B A_B^{-1} a_1 - c_1 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = (1 - 2/3) - 1 = -2/3$$

$$z_4 - c_4 = c_B A_B^{-1} a_4 - c_4 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1/3 - 0 = -1/3$$

Note que $z_1 - c_1 < 0$, então o valor da função objetivo é melhorado aumentando o valor de x_1. Neste caso a nova solução é dada por:

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}a_1 x_1,\ \text{isto é}\ \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} x_1$$

O valor máximo de x_1 é 3 (Qualquer valor maior de x_1 forçará x_3 a ser negativo). Portanto a nova solução básica admissível é (3, 2, 0, 0) que se obtém trocando a variável básica x_3, que passa a não básica, com a variável básica x_1.

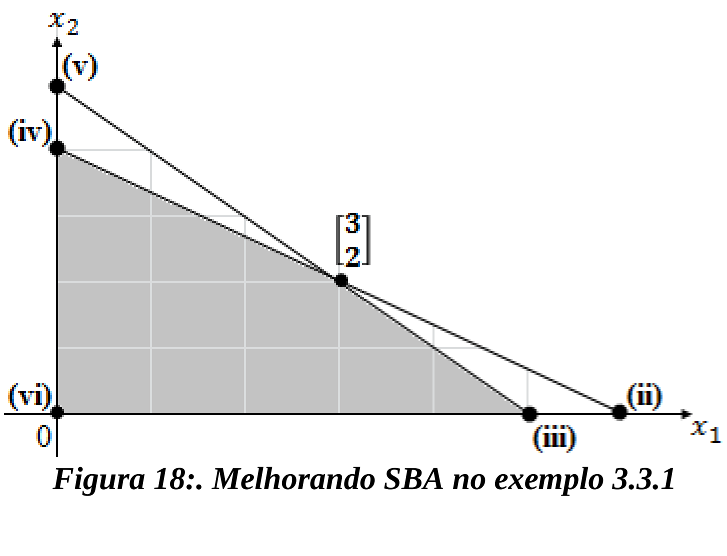

Figura 18:. Melhorando SBA no exemplo 3.3.1

***Algoritmo do simplex* (*Problema de minimização*).**

Considerando uma solução básica admissível inicial $x_0 = [x_B \quad x_N]^t = [A_B^{-1}b \quad 0]^t$, associada a uma qualquer base (inicial) A_B com valor $z_0 = c_B A_B^{-1} b$, a forma algébrica do algoritmo simplex, para um problema de minimização é dada por seguinte.

Escolha uma solução básica admissível inicial e seja A_B a base associada.

Passo principal:

(i). Resolva o sistema $A_B x_B = b$ e seja $x_B = A_B^{-1}b = \bar{b}$ a sua única solução com $x_N = 0$ e $z = c_B^t x_B$.

(ii). Resolva o sistema $y_B^t A_B = c_B^t$ e seja $y_B^t = c_B^t A_B^{-1}$ a sua solução única. Calcule $z_j - c_j = y_B^t a_j - c_j$ para todas as variáveis não são básicas.

Seja $z_k - c_k = \max\limits_{j \in J}\{z_j - c_j\}$, sendo J o conjunto índices das variáveis não básicas.

(1) Se $z_k - c_k < 0$, PARAR, a solução básica admissível atual é uma solução ótima.

(2) Se $z_k - c_k = 0$, a solução básica admissível atual é uma solução ótima, mas não é única se a solução não for degenerada. Siga para (***iii***), considerando como variável de entrada na base a variável x_k, de modo a encontrar a solução ótima alternativa.

(3) Se $z_k - c_k > 0$, siga para (***iv***) considerando como variável de entrada na base a variável x_k.

(iii). Seja a_k é a coluna da matriz A do sistema associada à variavel x_k. Resolva o sistema $A_B \bar{A}_k = a_k$ e seja $\bar{A}_k = A_B^{-1} a_k$ a sua única solução. Se $\bar{A}_k \leq 0$, pare, a solução ótima é ilimitada ao longo do raio

$\left\{\begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -\bar{A}_k \\ e_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0\right\}$, onde e_k é um vetor de dimensão $|J|$. Caso contrário continua no passo ***(iv)***.

(iv). Seja x_k a variável de entrada na base. O índice r da variável x_{B_r} que sai da base é determinado pelo seguinte quociente $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r_k}} = \min\limits_{i \in I_B}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i_k}} : \bar{a}_{i_k} > 0\right\}$ sendo I_B o conjunto de índices das variáveis básicas. Atualize a base A_B em que a coluna a_k substitui a coluna a_{B_r}. Atualize os conjuntos de índices I_B e J

Volte ao passo (***i***).

De forma a facilitar a aplicação do algoritmo do simplex, é usual apresentar o algoritmo do simplex em tabelas da seguinte forma:

	$z_j - c_j$	x_B	x_N	
x_B	**0**	**I**	$A_B^{-1}A_N$	$A_B^{-1}b$
$z_j - c_j$	1	**0**	$c_B^t A_B^{-1}A_N - c_N$	$c_B^t A_B^{-1}b$

Tabela 8:O método simplex no formato tabela

Exemplo 3.3.2 Considere o seguinte problema PL.

$$max: z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} s.a: \quad x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 12 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 14 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Começamos por escrever este problema na forma padrão,

$$max: \quad z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} s.a: \quad x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 12 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 14 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tomamos $A_B = [a_4 \quad a_5 \quad a_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. A resolução do sistema $A_B x_B = b$, leva a $\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$. As variáveis não básicas x_1, x_2 e x_3 com função objetivo dada por: $z = c_B^t x_B = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$ = 0. A solução inicial é dada por: $x^{(0)} = (0,\ 0,\ 0,\ 12,\ 10,\ 14)$, $z^{(0)}$ = 0.

Quadro 1

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	c_B
x_4	1	3	1	1	0	0	12	0
x_5	2	-1	2	0	1	0	10	0
x_6	1	2	**4**	0	0	1	14	0
$z_j - c_j$	-1	-2	**-3**	0	0	0	0	

Linha pivot

Coluna pivot

Elemento pivot

<u>Iteração 1</u>

Como o problema é de maximização, o quadro do simplex diz-se ótimo se e só se $z_j - c_j \geq 0$. Neste caso o Quadro 1 não é ótimo.

Variável de entrada:

Selecionar a variável não-básica com custo reduzido negativo de maior valor absoluto. No Quadro 1 será a variável x_3 com $z_3 - c_3 = -3$.

A coluna da variável que entra é designada por *coluna pivot*.

Variável de saída:

- Selecionar os coeficientes positivos da coluna pivot;
- Dividir cada um dos elementos da coluna b pelos elementos positivos da coluna pivot da respetiva linha da tabela;
- Identificar a fração com o menor valor obtido;
- Selecionar a variável básica correspondente a essa fração: x_6.

Mínimo entre $\left(\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i_k}}\right) = \min\left\{\frac{12}{1}, \frac{10}{2}, \frac{14}{4}\right\} = \min\{12, 5, 3{,}5\} == 3{,}5 \Rightarrow$ escolhemos: 3ª linha e 3ª coluna.

Nota: se $\bar{a}_{i_k} < 0$ ignorar esta linha.

A linha da variável que sai da base é denominada por *linha pivot*.

Nova solução básica admissível:

Para modificar o coeficiente da nova variável básica na linha pivot para 1, divide-se toda a linha pelo elemento pivot (elemento que pertence simultaneamente à linha pivot e à coluna pivot). Nova linha pivot = $\frac{\text{linha pivot antiga}}{\text{número pivot}}$, isto é

x_3	0.25	0.5	1	0	0	0.25	3.5	3

Falta ainda colocar os coeficientes da nova variável básica (x_3) a 0 nas outras equações.

- linha 1: coeficiente da coluna pivot = 1
- linha 2: coeficiente da linha pivot = 2
- linha 4: coeficiente da linha pivot = – 3

nova linha = linha antiga – (coeficiente linha pivot × nova linha pivot).

Após a realização dos cálculos, obteremos o resultado no Quadro 2.

Quadro 2

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_4	0.75	2.5	0	1	0	–0.25	8.5	0
x_5	1.5	–2	0	0	1	–0.5	3	0
x_3	0.25	0.5	1	0	0	0.25	3.5	3
$z_j - c_j$	–0.25	–0.5	0	0	0	0.75	10.5	

Solução: $x^{(2)} = (0,\ 0,\ 3.5,\ 8.5,\ 3{,}0)$, $z^{(2)}$ = 10.5

<u>Iteração 2</u>. O Quadro 2 ainda não é ótimo pois existem custos reduzidos negativos.

A variável x_2 entra na base. A variável x_4 sai da base

Elemento pivot = 2,5. Após recalcular o quadro com base na mudança de base, obtemos o Quadro 3.

Quadro 3								
x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_2	0.3	1	0	0.4	0	–0.1	3.4	2
x_5	2.1	0	0	0.8	1	–0.7	9.8	0
x_3	0.1	0	1	–0.2	0	0.3	1.8	3
$z_j - c_j$	–0.1	0	0	0.2	0	0.7	12.2	

Solução: $x^{(3)} = (0,\ 3.4,\ 1.8,\ 0,\ 9.8,0)$, $z^{(2)}$ = 12.2

<u>Iteração 3</u>.

Como existe um custo reduzido negativo, o quadro do simplex não é ótimo.

Entra x_1 para a base e sai a variável x_5 da base. Elemento pivot = 2, 1.

Obteremos resultado no quadro 4.

Quadro 4								
x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_2	0	1	0	2/7	–1/7	0	2	2
x_1	1	0	0	8/21	10/21	–1/3	14/3	1
x_3	0	0	1	–5/21	–1/21	1/3	4/3	3
$z_j - c_j$	0	0	0	5/21	1/21	2/3	38/3	

Como todos os custos reduzidos são não negativos ($z_j - c_j \geq 0, \forall j$), o quadro 4 é ótimo, ou seja, não podemos diminuir mais o valor da função objetivo.

Portanto, a solução básica ótima é $x^4 = \left(\frac{14}{3},\ 2,\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right)$, logo a solução ótima é $x^* = \left(\frac{14}{3},\ 2,\ \frac{4}{3}\right)$, com valor $z^* = z^4 = \frac{38}{3}$.

Exercícios –

1. Considere o seguinte conjunto de restrições

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + \ x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 1 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   a. Desenhe a região admissível.
   b. Identifique todos os pontos extremos e, para cada um, identifique todas as possíveis variáveis básicas e não básicas.
   c. Suponha que é efetuado um movimento do ponto extremo (2, 4) para o ponto extremo (0, 2) no espaço das variáveis $\{x_1,\ x_2\}$. Especifique as possíveis variáveis de entrada e saída da base.

2. Considere o seguinte conjunto de restrições

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \quad &\leq \quad 12 \\ 2x_1 - \quad x_2 \quad &\geq \quad -2 \\ -x_1 + 2x_2 \quad &\leq \quad -4 \\ x_1, \quad x_2 \quad &\geq \quad 0 \end{aligned}$$

   a. Desenhe a região admissível.
   b. Identifique todos os pontos extremos e, para cada um, identifique todas as possíveis variáveis básicas e não básicas.
   c. Suponha que é efetuado um movimento do ponto extremo $\left(\frac{4}{7}, \frac{36}{7}\right)$ para o ponto extremo (4, 0) no espaço das variáveis $\{x_1,\ x_2\}$. Especifique as possíveis variáveis de entrada e saída da base.

3. Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 \quad &\leq \quad 4 \\ -2x_1 + \ x_2 \quad &\leq \quad 2 \\ 3x_1 - 4x_2 \quad &\geq \quad -12 \\ x_1 + \ x_2 \quad &\leq \quad 8 \\ x_1, \quad x_2 \quad &\geq \quad 0 \end{aligned}$$

   a. Desenhe a região admissível e identifique a solução ótima.
   b. Identifique todos os pontos extremos e, para cada um, identifique todas as possíveis variáveis básicas e não básicas.

c. Suponha que é efetuado um movimento do ponto extremo $\left(\frac{20}{7},\frac{36}{7}\right)$ para o ponto extremo $\left(\frac{4}{5},\frac{18}{5}\right)$ no espaço das variáveis $\{x_1,\ x_2\}$. Especifique as possíveis variáveis de entrada e saída da base.

4. Considere o seguinte problema de PL

Max: $z = x_1 + 3x_2$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad x_1 - 2x_2 &\leq 0\\
-2x_1 + x_2 &\leq 4\\
5x_1 + 3x_2 &\leq 15\\
x_1,\quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a. Desenhe a região admissível e identifique a solução ótima.

b. Identifique todos os pontos extremos e, para cada um, identifique todas as possíveis variáveis básicas e não básicas.

c. Resolva o problema pelo método simplex

5. Resolva o seguinte problema de PL pelo método simplex. Em cada iteração identifique as matrizes A_B e A_B^{-1}.

Max: $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{: } 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\leq 3\\
-x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2\\
x_1,\quad x_2,\quad x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

6. Resolva o seguinte problema de PL pelo método simplex.

a. Max: $z = -2x_1 + 4x_2 - 6x_3$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{: } 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 &\leq 4\\
2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2\\
x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq 5\\
x_1,\quad x_2,\quad x_3, &\geq 0
\end{aligned}
$$

b. Max: $z = x_1 - 2x_2 + x_3$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 12\\
2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 6\\
-x_1 + 3x_2 &\leq 9\\
x_1,\quad x_2,\quad x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

c. Min: $z = 9x_1 + 18x_2 + 7x_3 + 6x_4$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{: } x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 3\\
x_1 + x_2 + x_4 &\geq 2\\
x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

d. Max: $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 25 \\
x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\leq 16 \\
5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &\leq 20 \\
x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

e. Min: $z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\geq 18 \\
x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\geq 16 \\
5x_1 + 4x_2 \qquad\quad - x_4 &\geq 20 \\
x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

f. Min: $z = 10x_1 + 16x_2$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad 5x_1 + 4x_2 &\geq 1 \\
10x_1 + 4x_2 &\geq 5 \\
2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\
x_1,\quad x_2, &\geq 0
\end{aligned}
$$

3.4. Casos Particulares

3.4.1. Existência de uma infinidade de soluções ótimas

Esta situação é identificada quando, em presença de uma solução básica admissível ótima, se verifica a existência de algum vetor a_j, não pertencente à base, para o qual se tem $z_j - c_j$= 0 e pelo menos um $y_{ij} > 0$ com o correspondente termo independente, $\bar{b}_i$, não nulo. Neste caso, o problema tem uma infinidade de soluções ótimas que corresponde a um segmento de reta de soluções ótimas, sendo duas delas básicas e, as restantes, podendo ser obtidas como combinação linear convexa daquelas. No outro caso, se $z_j - c_j$ = 0 e se verifica $y_{ij} \leq 0$ para todo i, então o conjunto das soluções ótimas é não limitado (em duas dimensões corresponde a uma semi-reta).

Graficamente é possível identificar uma solução ótima múltipla, quando a restrição mais afastada no sentido da deslocação da função objetivo for paralela à reta que a representa. Pode constatar-se este facto na resolução gráfica do problema apresentado no *Exemplo 2.5.2*. Verificou-se que o problema apresentava mais do que uma solução ótima. A mesma conclusão pode ser obtida por aplicação do método do simplex.

Exemplo 3.4.1 O problema P.L com existência de soluções ótimas alternativas.

Considere o problema PL

$$max: \quad z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{lrcr} s.a: & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 12 \\ & 2x_1 + \ \ x_2 - x_3 & \leq & 6 \\ & -x_1 + 3x_2 \quad\quad & \leq & 9 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

A PL na forma padrão:

$$max: \quad z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{lrcr} s.a: & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad\quad\quad & = & 12 \\ & 2x_1 + \ \ x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad\quad & = & 6 \\ & -x_1 + 3x_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad + x_6 & = & 9 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

temos a solução inicial: $x^{(1)} = (0,\ 0,\ 0,\ 12,\ 6,\ 9)$, $z^{(1)} = 0$.

Aplicando o método do simplex obtemos sucessivamente:

Quadro 1								
x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_4	1	2	1	1	0	0	12	0
x_5	2	1	–1	0	1	0	6	0
x_6	–1	3	0	0	0	1	9	0
$z_j - c_j$	–1	2	–1	0	0	0	0	

Após iteração 1, obtém-se o quadro 2.

Quadro 2								
x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_4	0	3/2	3/2	1	–1/2	0	9	0
x_1	1	1/2	–1/2	0	1/2	0	3	1
x_6	0	7/2	–1/2	0	1/2	1	12	0
$z_j - c_j$	0	5/2	–3/2	0	1/2	0	3	

Passo 3: escolhendo x_3 para entrar na base vem

Quadro 3								
x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	1	1	2/3	–1/3	0	6	1
x_1	1	1	0	1/3	1/3	0	6	1
x_6	0	4	0	1/3	1/3	1	15	0
$z_j - c_j$	0	4	0	1	0	0	12	

Verifica-se $z_j - c_j \geq 0, \forall j$. O quadro é ótimo, pois não existe nenhum outro custo reduzido negativo, ou seja, não podemos diminuir mais a função objetivo.

Portanto, uma SBA ótima é:

$x^3 = (6,\ 0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 15)$, z^3 = 12. Logo, $x^* = (6,\ 2,\ 0)$, z^* = 12.

No entanto, a solução ótima não é única. Note-se que $z_5 - c_5 = 0$, isto é a variável x_5 está em condições de entrar na base, obtendo-se o seguinte quadro óptimo alternativo:

Quadro 4								
x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_3	1	2	1	1	0	0	12	1
x_5	3	3	0	1	1	0	18	0
x_6	–1	3	0	0	0	1	9	0
$z_j - c_j$	0	4	0	1	0	0	12	

A solução ótima correspondente a este novo quadro é:

$x^4 = (0,\ 0,\ 12,\ 0,\ 18,\ 9)$, z^4 = 12. Logo, $x^* = (0,\ 0,\ 12)$, z^* = 12.

Logo, temos infinidade de soluções ótimas.

O conjunto de todas as soluções ótimas é dada por:

$x^* = \lambda(6,\ 0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 15)$ + $(1-\lambda)(0,\ 0,\ 12,\ 0,\ 18,\ 9)$, $\lambda \in [0,1]$

3.4.2. Solução ilimitada

Seja a função objetivo de PL é de ser maximizada. Solução ilimitada ocorre, como já foi referido em *2.5.2 (v)*, quando existe condição $z_k - c_k < 0$, e $a_{ik} \leq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, m$. Neste caso o problema sem limite superior para o valor da função objetivo. Em termos gráficos, uma condição necessária, mas não suficiente para a existência de uma solução não limitada é que o conjunto das soluções admissíveis seja também não limitado. Na resolução gráfica do problema no *Exemplo 2.5.5* constatou-se que não existia um valor máximo finito para z. Este resultado pode também verificar-se por aplicação do método simplex.

Exemplo 3.4.2 solução não limitada.

Max: $z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{lrl}
s.a: & -2x_1 + \ x_2 & \leq 1 \\
 & x_1 - 2x_2 & \leq 2 \\
 & x_1, \quad x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Incluindo variáveis desvio no problema para o colocar na forma padrão, vem:

Max: $z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{lrl}
s.a: & -2x_1 + \ x_2 + x_3 \qquad & = 1 \\
 & x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 & = 2 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Considere-se uma solução básica admissível e o correspondente quadro simplex inicial:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$	c_B
x_3	– 2	1	1	0	1	0
x_4	1	– 2	0	1	2	0
$z_j - c_j$	–1	–1	0	0	0	

Uma vez que esta solução não é ótima, efetua-se uma iteração fazendo x_1 entrar para a base:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	–3	1	2	5	0
x_1	1	–2	0	1	2	1
$z_j - c_j$	0	–3	0	1	2	

Verifica-se que a solução obtida não é ótima, podendo ser melhorada se a variável x_2 entrar na base. No entanto, de acordo com o critério de saída, não é possível fazer sair nenhuma variável da base. Assim, perante esta situação, pode concluir-se que o problema tem uma infinidade de soluções não básicas, sem limite superior para a função objetivo.

3.4.3. Determinação de Solução básica inicial.

Para resolver um problema de Programação Linear pelo método simplex é necessário que exista uma solução básica admissível inicial. Por vezes essa solução pode ser encontrada trivialmente. Tal ocorre, por exemplo, quando associado a um conjunto de variáveis temos a matriz identidade, como é o caso das variáveis de desvio quando introduzidas em restrições do tipo $\leq$. Contudo, quando isso não acontece podemos recorrer à introdução de novas variáveis no problema inicial, denominadas variáveis artificiais. O problema alterado só é equivalente ao inicial quando as variáveis artificiais forem nulas. Existem vários métodos para tratamento destas variáveis artificiais, nomeadamente o método das duas fases e o método das penalidades (ou do *big*-M).

3.4.3.1. Método das duas fases

Suponhamos inicialmente que foram efetuadas transformações no problema PL, de modo que tenhamos $b_i \geq 0$, para todas as restrições. Para cada restrição de igualdade, seja ela a i – ésima restrição, introduziremos uma variável artificial não-negativa x_i^a. Igualmente, para cada desigualdade do tipo $\geq$ introduzimos, além da variável de folga, uma variável artificial não-negativa, isto é:

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j + x_i^a = b_i \\ x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + x_i^a = b_i \\ x_{n+i} \geq 0, \;\; x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

A primeira fase, Fase *I*, do método visa a obtenção de uma solução básica admissível inicial para o problema PL original P. Com a introdução das variáveis artificiais, temos um novo problema de PL, P', diferente de P, mas com uma solução básica admissível inicial fácil de ser obtida. Para tal, basta considerar como variáveis básicas:

i. as variáveis de folga associadas às restrições do tipo ≤ ,

ii. as variáveis artificiais correspondentes às restrições do tipo "=" e "≥".

A seguir, devemos caminhar de solução básica admissível em solução básica admissível de P' até se obter uma solução básica admissível para P. A questão é saber quando teremos uma solução básica admissível de P. Para cumprir esse objetivo, trabalharemos na primeira fase com uma função objetivo artificial, a saber,
$w(x) = \sum_i x_i^a$, a qual deve ser minimizada. Como $x_i^a \geq 0, \forall i$, o menor valor possível será obtido para $x_i^a = 0, \forall i$.

Terminando a Fase I, abandonamos a função w e passamos a considerar a função objetivo dada no problema original (Fase *II*).

Exemplo 3.4.3 (resolução pelo método das duas fases)

Consideremos o problema PL dado por:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} Min: & z = 2x_1 & - & 10x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & & \\ s.\,a: & 3x_1 & + & 6x_2 & & & + & 4x_4 & \leq & 100 \\ & 4x_1 & & & & & + & 10x_4 & \geq & 50 \\ & -3x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & & & \geq & 30 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Após a introdução das *variáveis folga* x_5, x_6 e x_7, obtém-se o seguinte problema de PL na forma padrão:

$$
\begin{array}{llcr}
Min: & z = 2x_1 - 10x_2 + x_3 + 4x_4 & & \\
s.\ a: & 3x_1 + 6x_2 \quad + \ 4x_4 + x_5 & = & 100 \\
 & 4x_1 \quad + 10x_4 \quad - x_6 & = & 50 \\
 & -3x_1 + \ x_2 + 6x_3 \quad - x_7 & = & 30 \\
 & x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Acrescentamos as *variáveis artificiais* x_8^a e x_9^a para obtermos a matriz identidade:

$$
\begin{array}{llcr}
Min: & z = 2x_1 - 10x_2 + x_3 + 4x_4 & & \\
s.\ a: & 3x_1 + 6x_2 \quad + \ 4x_4 + x_5 & = & 100 \\
 & 4x_1 \quad + 10x_4 \quad - x_6 \quad + x_8^a & = & 50 \\
 & -3x_1 + \ x_2 + 6x_3 \quad - x_7 \quad + x_9^a & = & 30 \\
 & x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7, \ x_8^a, \ x_9^a & \geq & 0
\end{array}
$$

Passo1: Para iniciar este método, vamos construir uma função objetivo artificial $\boldsymbol{w}$, formada pela soma das variáveis artificiais $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x_8^a} + \boldsymbol{x_9^a}$. Só quando as variáveis artificiais saírem da base (e, portanto, o valor da função objetivo $\boldsymbol{w}$ for nulo) é que se obtém uma solução básica admissível inicial para o problema.

Passo 2: A função $\boldsymbol{w}$ deve ser escrita em termos das variáveis originais e comporá o novo objetivo a ser minimizada.

$$
\begin{array}{ccl}
x_8^a & = & 50 - 4x_1 \qquad - 10x_4 + x_6 \\
\underline{x_9^a} & \underline{=} & \underline{30 + 3x_1 - x_2 - 6x_3 \qquad + x_7} \\
w & = & 80 - x_1 - x_2 - 6x_3 - 10x_4 + x_6 + x_7
\end{array}
$$

Função objetivo transformada: $w \ = \ 80 - x_1 - x_2 - 6x_3 - 10x_4 + x_6 + x_7$

Passo 3: Define-se o quadro da solução inicial de forma exatamente igual à forma do método do simplex, colocando-se a função objetivo artificial transformada na última linha.

Passo 4: Aplica-se o método do simplex normalmente, usando como função objetivo a *ser minimizada a última linha*. Quando a solução ótima for atingida, dois casos podem ocorrer:

(i). $\boldsymbol{w} = 0$: neste caso foi obtida uma solução básica do problema original e o processo de resolução deve continuar desprezando-se as variáveis artificiais e os elementos da última linha. Passamos à Fase II do processo.

(ii). $\boldsymbol{w} \neq 0$: neste caso o problema original não tem solução admissível, o que significa que as restrições são inconsistentes.

Fase 1: minimizar $\boldsymbol{w}$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	$\bar{b}$
x_5	3	6	0	4	1	0	0	0	0	100
x_8^a	4	0	0	10	0	–1	0	1	0	50
x_9^a	–3	1	6	0	0	0	–1	0	1	30
$z_z - c_j$	–2	10	–1	–4	0	0	0	0	0	0
$w_j - c_j$	1	1	6	10	0	–1	–1	0	0	–80

⇓

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	$\bar{b}$
x_5	7/5	6	0	0	1	2/5	0	–2/5	0	80
x_4	2/5	0	0	1	0	–1/10	0	1/10	0	5
x_9^a	–3	1	6	0	0	0	–1	0	1	30
$z_z - c_j$	–2/5	10	–1	0	0	–2/5	0	2/5	0	20
$w_j - c_j$	–3	1	6	0	0	0	–1	–1	0	–30

⇓

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	$\bar{b}$
x_5	7/5	6	0	0	1	2 /5	0	–2/5	0	80
x_4	2/5	0	0	1	0	–1/10	0	1/10	0	5
x_3	–1/2	1/6	1	0	0	0	–1/6	0	1 / 6	5
$z_z - c_j$	–9/10	61/6	0	0	0	–2/5	–1/6	2/5	1/6	25
$w_j - c_j$	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1	0

Deste quadro final do problema a *minimizar* $\boldsymbol{w}$, existe uma solução admissível para o problema, assim, ignorando a última linha ($\boldsymbol{w}$), podemos eliminar as colunas $\boldsymbol{x_8^a}$ e $\boldsymbol{x_9^a}$ e passar para a Fase II.

Passo 5: aplica-se o método do simplex normalmente ao quadro inicial da Fase II para minimizar: $\boldsymbol{z}$.

Fase 2: minimizar: $\boldsymbol{z}$.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_5	7/5	6	0	0	1	2 /5	0	80
x_4	2/5	0	0	1	0	–1/10	0	5
x_3	–1/2	1/6	1	0	0	0	–1/6	5
z	–9/10	61/6	0	0	0	–2/5	–1/6	25

Quadro final do problema de minimização:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_2	7/30	1	0	0	1/6	1/15	0	40/3
x_4	2/5	0	0	1	0	–1/10	0	5
x_3	–97/180	0	1	0	–1/36	–1/90	–1/6	25/9
z	–589/180	0	0	0	–61/36	–97/90	–1/6	–995/9

Solução ótima: $\boldsymbol{x}^* = (0, 40/3, 25/9, 5)$ com $\boldsymbol{z}^* = -995/9$.

3.4.3.2 Método do *big*-M

Alternativamente ao método das duas fases, pode-se trabalhar apenas com uma função objetivo onde se penalizam as variáveis artificiais, atribuindo-lhes um custo muito elevado M (*big*-M). Assim, estas variáveis tenderão a sair da base rapidamente.

Exemplo 3.4.4 (resolução pelo método *big* – M)

Consideremos o seguinte problema de PL.

$$
\begin{array}{llcl}
Min: & z = 2x_1 - 10x_2 + x_3 + 4x_4 & & \\
s.\ a: & 3x_1 + 6x_2 \qquad + \ \ 4x_4 & \leq & 100 \\
& 4x_1 \qquad\qquad\quad + 10x_4 & \geq & 50 \\
& -3x_1 + \ x_2 + 6x_3 & \geq & 30 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Após introduzir as variáveis folga e as variáveis artificiais, obtém-se:

$$
\begin{array}{lcl}
3x_1 + 6x_2 \qquad + \ 3x_4 + x_5 & = & 100 \\
4x_1 \qquad\qquad + 10x_4 \quad - x_6 \qquad + x_8^a & = & 50 \\
-3x_1 + x_2 + 6x_3 \qquad\qquad - x_7 \qquad + x_9^a & = & 30 \\
x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7, \ x_8^a, \ x_9^a & \geq & 0
\end{array}
$$

A função objetivo modificada é dada por:

$$z = 2x_1 - 10x_2 + x_3 + 4x_4 + Mx_6^a + Mx_7^a$$

À medida que z é minimizado, as variáveis artificiais x_8^a e x_9^a deixam a base, devido ao grande valor de M. O quadro inicial fica então:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	$\bar{b}$
x_5	3	6	0	4	1	0	0	0	0	100
x_8^a	4	0	0	10	0	–1	0	1	0	50
x_9^a	–3	1	6	0	0	0	–1	0	1	30
$z_j - c_j$	–2	10	–1	–4	0	0	0	–M	–M	

Multiplicando as linhas 2 e 3 por "M", e adicionando à ultima linha obtém-se:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	$\bar{b}$
x_5	3	6	0	4	1	0	0	0	0	100
x_8^a	4	0	0	10	0	–1	0	1	0	50
x_9^a	–3	1	6	0	0	0	–1	0	1	30
z	M – 2	10 + M	6M – 1	10M – 4	0	–M	–M	0	0	80M

⇓

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	$\bar{b}$
x_5	7/5	6	0	0	1	2/5	0	–2/5	0	80
x_4	2/5	0	0	1	0	–1/10	0	1/10	0	5
x_9^a	–3	1	6	0	0	0	–1	0	1	30
z	–2/5 – 3M	10+M	6M – 1	0	0	–2/5	–M	2/5 – M	0	30M + 20

⇓

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	$\bar{b}$
x_5	7/5	6	0	0	1	2/5	0	–2/5	0	80
x_4	2/5	0	0	1	0	–1/10	0	1/10	0	5
x_3	–1/2	1/6	1	0	0	0	–1/6	0	1/6	5
z	– 9/10	61/6	0	0	0	–2/5	–1/6	2/5 – M	1/6 – M	25

⇓

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	$\bar{b}$
x_2	7/30	1	0	0	1/6	1/15	0	–1/15	0	40/3
x_4	2/5	0	0	1	0	–1/10	0	1/10	0	5
x_3	–97/180	0	1	0	–1/6	–1/90	–1/6	1/90	1/6	25/9
z	–589/180	0	0	0	–61/6	–97/90	–1/6	97/90–M	1/6–M	–995/9

Neste quadro, os coeficientes das variáveis básicas, na linha dos custos reduzidos são nulos e os coeficientes das variáveis não básicas são negativos. Num problema de minimização, quando isto acontece, significa que chegamos à solução ótima, em que, neste caso é dada por:

x^* = (0, 40/3, 25/9, 5) com solução ótima dada por: z^*=- 995/9.

Note-se que nos dois últimos quadros as variáveis artificiais são não-básicas, pelo que as correspondentes soluções básicas (eliminando as variáveis artificiais) são soluções admissíveis para o problema original.

Exercícios –

1. Identifique entre os seguintes problemas de PL quais os que têm uma infinidade de soluções ótimas ou soluções ilimitadas.

   a. Max: z = $x_1 + 2x_2 + x_3$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 10 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 17 \\
x_1,\quad x_2,\quad x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

   b. Max: z = $3x_1 + x_2 - x_3$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad 3x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 &\leq 30 \\
5x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq 45 \\
x_1,\quad x_2,\quad x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

   c. Max: z = $x_1 + 2x_2$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad -3x_1 + \ x_2 &\leq 3 \\
5x_1 - 3x_2 &\geq -15 \\
x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\
x_1,\quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

   d. Max: z = $5x_1 + x_2 - x_3$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad 3x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 &\leq 30 \\
5x_1 \qquad\qquad - 2x_3 &\leq 45 \\
x_1,\quad x_2,\quad x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

   e. Min: z = $3x_1 + 5x_2$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad 3x_1 - \ x_2 &\geq -3 \\
5x_1 - 3x_2 &\geq -15 \\
x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\
3x_1 + 5x_2 &\geq 15 \\
x_1,\quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. Resolva os seguintes problemas pelo método das duas fases

   a. Min: z = $x_1 - 2x_2$

$$
\begin{aligned}
s.a\text{:}\quad x_1 + x_2 &\geq 2 \\
-x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1,\quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

   b. Min: z = $x_1 + 3x_2 - x_3$

$$
\begin{aligned}
s.a{:}\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 && \geq && 3 \\
& -x_1 + x_2 && \geq && 1 \\
& -x_1 - 5x_2 + x_3 && \leq && 4 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 && \geq && 0
\end{aligned}
$$

c. Min: z = $4x_1 + 5x_2 - 3x_3$

$$
\begin{aligned}
s.a{:}\ & x_1 + 2x_2 + x_3 && = && 10 \\
& x_1 - \ x_2 && \geq && 6 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 && \leq && 14 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 && \geq && 0
\end{aligned}
$$

3. Resolva o seguinte problema pelo método do *big*–M.

a. Min: z = $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4$

$$
\begin{aligned}
s.a{:}\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 && \geq && 8 \\
& -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 && \leq && 3 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 && \geq && 0
\end{aligned}
$$

b. Min: z = $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$

$$
\begin{aligned}
s.a{:}\ & 2x_1 + \ x_2 + x_3 && = && 4 \\
& x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 && = && 6 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 && \geq && 0
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

4. Dualidade

O termo dualidade refere-se ao fato de que cada modelo de programação linear tem associada uma outra forma. A primeira, ou original, é designada pelo problema **primal** e a segunda forma do modelo é designada por problema **dual**. Como seria de esperar, as propriedades de uma das formas do modelo estão relacionadas com as propriedades da outra. Como resultado desta relação é possível obter a solução ótima de um problema a partir da solução ótima do outro, (*veja*: [1], [2], [3], [4], [6], [7], [8],[10], [11], [12] , [17], [19], [20], [21]).

4.1. Construção do problema dual

Tomemos como exemplo problemas escritos na forma canónica. Considere-se um problema de P.L na forma canónica de maximização [14]

Max: $z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$

$$\text{s. a:} \quad \begin{array}{c} \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array} \tag{4.1}$$

com $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}^t \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Associado a este problema existe um outro que se designa por problema dual, e é dado pelo seguinte problema na forma canónica de minimização:

Min: $w = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$

$$\text{s. a:} \quad \begin{array}{c} \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq 0 \end{array} \tag{4.2}$$

em que $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b}^t \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A}^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Contudo os problemas podem não estar escritos na sua forma canónica. Nesse caso podem aplicar-se regras de transformação que, em qualquer caso, permitem a passagem do problema de PL original (que se designa por problema primal) ao problema dual:

(i). Se a função objetivo do *dual* é de minimização a do *primal* é de maximização, e *vice-versa*.

(ii). Os termos independentes das restrições do *dual* são os coeficientes da função objetivo do *primal*.

(iii). Os coeficientes da função objetivo do *dual* são os termos independentes das restrições do *primal*.

(iv). O número de variáveis do *dual* é igual ao número de restrições do *primal*.

(v). O número de restrições do *dual* é igual ao número de variáveis do *primal*.

(vi). A matriz dos coeficientes do *dual* é a transposta da matriz dos coeficientes do *primal*.

As relações Primal – Dual podem ser resumidas nos quadros seguintes:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Problema Primal</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>x_1 x_2 … x_n</td><td>Termos independentes</td></tr>
<tr><td>Problema dual</td><td>y_1
y_2
…
y_m</td><td>a_{11} a_{12} ⋯ a_{1n}
a_{21} a_{22} ⋯ a_{2n}
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
a_{m1} a_{m2} ⋯ a_{mn}</td><td>$\leq b_1$
$\leq b_2$
….
$\leq b_m$</td><td>Coeficiente da função objetivo (mínimo)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Termos independentes</td><td>|V |V ... |V
c_1 c_2 ⋯ c_n</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Coeficiente da função Objetivo (máximo)</td></tr>
</table>

Tabela 9:Quadro matricial das relações Primal-Dual

Relações Primal – Dual.

Maximizar	Passagem Ao dual		Minimizar
i-ésima Restrição	$\leq$ $\geq$ $=$	i-ésima Variável	≥ 0 ≤ 0 Livre
j-ésima variável	≥ 0 ≤ 0 Livre	j-ésima restrição	$\geq$ $\leq$ $=$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$		$A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$	
Coeficiente da função objetivo		Termos independentes das restrições	
Termos independentes das restrições		Coeficiente da função objetivo	

Tabela 10: Quadro Relações Primal - Dual

Exemplo 4.1.1 Considere o problema PL na forma Primal seguinte.

Max: $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$
\begin{array}{lrcl}
s.a: & x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 12 \\
 & 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 14 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dado que se trata de um problema de maximização na forma canónica, o problema dual é um problema de minimização na forma canónica. Associando a cada restrição uma variável $y_i (i = 1, 2, 3)$ transpondo a matriz dos coeficientes técnicos e troncando os coeficientes da função objetivo com os termos independentes das restrições, obtém-se o seguinte problema dual:

Min: $w = 12y_1 + 10y_2 + 14y_3$

$$\begin{array}{lrcl} s.a: & y_1 + 2y_2 + \ \ y_3 & \geq & 1 \\ & 3y_1 - \ y_2 + 2y_3 & \geq & 2 \\ & y_1 + 2y_2 + 4y_3 & \geq & 3 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Note que y_1 é variável associada à primeira restrição, y_2 é variável associada à segunda restrição e y_3 é variável associada à terceira restrição.

4.2. Propriedades fundamentais da dualidade

Na apresentação das propriedades fundamentais vamos assumir que o problema primal é de maximização e o problema dual é de minimização, ambos na forma canónica.

(i). O dual do dual é o primal, [14].

Demonstração:

O dual do problema de Programação Linear na forma (***4.2***), que é o dual de (4.1), pode escrever-se na forma (***4.1***). O problema (4.2) pode escrever-se como

Max: $-w = -\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$

s. a: $\begin{array}{r} -\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{y} \leq -\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq 0 \end{array}$

Tomando o dual deste problema tem-se

$$\text{Min:} \quad -z = -\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \qquad (\textbf{\textit{4.3}})$$

s. a: $\begin{array}{r} -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array}$

Pode ainda escrever-se (***4.3***) na forma

Max: $z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$

s. a: $\begin{array}{r} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array}$

Ou seja, o dual do dual é o primal. ■

(ii). Se $\boldsymbol{x}$ for uma qualquer solução admissível do primal e se $\boldsymbol{y}$ for uma qualquer solução admissível do dual, então $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$.

Demonstração:

Sendo $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ou $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $\boldsymbol{x}$ uma solução admissível de (4.1), então pode escrever-se:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \dots, m \qquad (\textbf{\textit{4.4}})$$

Uma vez que $\boldsymbol{y}$ é uma solução admissível de (4.2), então $y_i \geq 0$, i = 1, 2, …, m. Assim, partindo de (4.4) pode obter-se: $y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \leq y_ib_i$, i = 1, 2, …, m.

Donde resulta que $\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \leq \sum_{i=1}^{m} y_ib_i$ i = 1, 2, …, m. Isto é,

$$\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \qquad (\textbf{\textit{4.5}})$$

Analogamente, sendo $\boldsymbol{y}$ uma solução admissível de (4.2) e $\boldsymbol{A}^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \geq c_j,\ j = 1, 2, \dots, n \qquad (\textbf{\textit{4.6}})$$

Dado que $\boldsymbol{x}$ é uma solução admissível de (4.1), então $x_i \geq 0$, j = 1, 2, …, n, logo de (4.5) pode escrever-se $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i\right)x_j \geq c_jx_j$, j = 1, 2, …, n.

Donde resulta que $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i\right)x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$, j = 1, 2, …, n. Isto é $(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{y})^t\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$ ou ainda,

$$\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \qquad (\textbf{\textit{4.7}})$$

Por fim, de (4.5) e (4.7) resulta $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$. ■

(iii). Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são soluções admissíveis para os problemas primal e dual, respetivamente, tais que $\boldsymbol{c}^t\bar{x} = \boldsymbol{b}^t\bar{y}$ então $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são soluções ótimas do primal e do dual, respetivamente.

Demonstração. Admitindo, por hipótese, que $\bar{y}$ é uma solução admissível do dual, então, com base na propriedade (***ii***), pode afirmar-se que $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$ qualquer que seja a solução admissível $\boldsymbol{x}$ do problema primal.

Igualmente, por hipótese, $\boldsymbol{c}^t\bar{x} = \boldsymbol{b}^t\bar{y}$. Donde se pode concluir que $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^t\bar{x}$.

Assim prova-se que $\bar{x}$ é solução ótima do primal.

Analogamente, se por hipótese, $\bar{x}$ é uma solução do primal, então, com base na propriedade (***ii***), pode afirmar-se que $\boldsymbol{c}^t\bar{x} \leq \boldsymbol{b}^t y$ para toda a solução admissível y do dual. Como, por hipótese, $\boldsymbol{c}^t\bar{x} = \boldsymbol{b}^t\bar{y}$ resulta que $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{b}^t\bar{y}$. Donde se conclui que $\bar{y}$ é solução ótima do problema dual. ■

(iv). Para qualquer par de problemas duais, a existência de solução ótima (finita) para um deles garante a existência de solução ótima (finita) para o outro, sendo iguais os respetivos valores das funções objetivo.

Demonstração:

Esta propriedade vai ser demonstrada construindo uma solução ótima para o dual partindo de uma solução ótima do primal. Para resolver, pelo método do simplex, um problema de Programação Linear que se encontra na forma (4.1) é necessário transformar as restrições em equações ficando o problema com a forma padrão:

Max: $\quad z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$

$$s.\,a: \quad \begin{array}{r} \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ix}_f = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_f \geq 0 \end{array} \qquad (\boldsymbol{4.8})$$

onde $\boldsymbol{x}_f$ são as variáveis folga, e $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade.

Admita-se que o problema (***4.8***) tem solução ótima finita, $\ddot{\boldsymbol{x}}$, então

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \qquad (\boldsymbol{4.9})$$

Sendo $\ddot{\boldsymbol{x}}_B$ o vetor formado pelas componentes de $\ddot{\boldsymbol{x}}$ respeitantes às variáveis básicas, $\boldsymbol{A}_B^{-1}$ a matriz inversa da base ótima $\boldsymbol{A}_B$ e $\boldsymbol{b}$ é o vetor dos termos independentes do problema primal.

Por outro lado, se $\ddot{\boldsymbol{x}}$ é uma solução ótima, então $c_j - z_j \leq 0$ para todo j, ou seja, para todos os vetores $\boldsymbol{a}_j$ de $\boldsymbol{A}$.

Assim, atendendo à definição de z_j,

$$\boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{A}_B^{-1} \boldsymbol{a}_j \geq \boldsymbol{c}_j,\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\boldsymbol{4.10})$$

em que c_B.é o vetor dos coeficientes da função objetivo respeitantes às variáveis básicas e a_j é o vetor dos coeficientes da variável x_j. Pode escrever-se (4.9) na forma

$$\boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{A}_B^{-1} \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^t \qquad (\boldsymbol{4.11})$$

Fazendo, em (4.11), $\ddot{\boldsymbol{y}}^t = \boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{A}_B^{-1}$, vem

$$\ddot{\boldsymbol{y}}^t \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^t \qquad (\boldsymbol{4.12})$$

Donde se pode concluir que $\ddot{\boldsymbol{y}}^t = \boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{A}_B^{-1}$ é uma solução do problema dual.

Considerando os $c_j - z_j$ para os vetores de desvio em (4.8), uma vez que o correspondente c_j= 0, vem $\boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{A}_B^{-1} \boldsymbol{I} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{A}_B^{-1} \geq \boldsymbol{0}$ ou seja $\ddot{\boldsymbol{y}}^t \geq \boldsymbol{0}$, logo $\ddot{\boldsymbol{y}}^t$ é uma solução admissível do dual.

$\ddot{z} = \boldsymbol{c}^t \ddot{\boldsymbol{x}}$, $\hat{z} = \boldsymbol{b}^t \ddot{\boldsymbol{y}}$ e dado que são nulas as componentes de $\ddot{\boldsymbol{x}}$ respeitantes às variáveis não básicas, vem

$$\ddot{z} = \boldsymbol{c}^t \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}_B^t \ddot{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{A}_B^{-1} \boldsymbol{b} = \ddot{\boldsymbol{y}}^t \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^t \ddot{\boldsymbol{y}} = \hat{z}$$

isto é, são iguais os valores das funções objetivo correspondentes às duas soluções. Assim, pela propriedade (***iii***), concluiu-se que $\ddot{\boldsymbol{y}}$ é solução ótima do dual. ■

Analogamente se pode demonstrar que a existência de solução ótima para o dual garante a existência de solução ótima para o primal e, nesse caso, os valores das respetivas funções objetivo nas soluções ótimas coincidem.

De salientar que o quadro ótimo do método do simplex permite obter a solução ótima do problema dual na linha dos custos reduzidos $c_j - z_j$ nas colunas correspondentes às variáveis de folga.

(v). Um problema de programação linear tem solução ótima (finita) se e só se existirem soluções admissíveis para os problemas primal e dual.

Demonstração.

Admita-se que as soluções admissíveis para os problemas primal e dual são, respetivamente, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, pelo que os valores das funções objetivo. $\sum_j c_j x_j$ e $\sum_i b_i y_i$, são finitos. Sabe-se pelo teorema (ii) que

$\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \sum_j c_j x_j \ \leq \sum_i b_i y_i$ e, como $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} = \sum_i b_i y_i$ é finito, a solução ótima do primal conduz a $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \sum_j c_j x_j^* \ \leq \sum_i b_i y_i$. sendo, portanto, finita a solução ótima do primal. Por (***iv***), a existência de solução ótima finita para o primal garante a existência de solução ótima finita para o dual. ■

(vi). Complementaridade dos desvios.

Considere-se o par de problemas duais na forma padrão

Max: $z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$ Min: $z = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$

$$s.\,a{:}\quad \begin{array}{c}\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ix}_f = \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_f \geq 0\end{array} \qquad\qquad s.\,a{:}\quad \begin{array}{c}\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Iy}_f = \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_f \geq 0\end{array} \qquad (\boldsymbol{4.13})$$

contendo $\boldsymbol{x}_f$ as variáveis de folga $x_{n+i}, i = 1, 2, \dots, m$ do primal, e $\boldsymbol{y}_f$ as variáveis de folga $y_{m+j}, j = 1, 2, \dots, n$ do dual. Para cada par de soluções ótimas para o par de problemas (4.13), verifica-se:

1) $y_i x_{n+i} = 0, i = 1, 2, \dots, m$

2) $x_j y_{m+j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$

***Demonstração de* (*1*):**

Multiplicando ambos os membros de $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ix}_f = \boldsymbol{b}$ por $\boldsymbol{y}^t$ vem

$\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{Ix}_f = \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b}$ ou ainda $\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b}$

admitindo que $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_f \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{y}$ são solução ótimas, respetivamente, para o primal e para o dual, então, sabe-se, pelas propriedades anteriores, que

$$\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}.$$

Como $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$ então $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$. Logo, $\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{x}_f = \sum_{i=1}^{m} y_i x_{n+i} = 0$. Isto é, $y_i x_{n+i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ pois $y_i \geq 0$ e $x_{n+i} \geq 0$. Assim, se $x_{n+i} \neq 0$ então $y_i = 0$ e se $y_i \neq 0$ então $x_{n+i} = 0$. Pode ainda acontecer $y_i = 0$ e $x_{n+i} = 0$. ■

A demonstração de (**2**) é análoga à que foi apresentada para (***1***).

O seguinte esquema faz um resumo desta importante propriedade.

Max: $z = \sum_{j\in J} c_j x_j$ s. a: $\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \leq b_i, i \in I$ $x_j \geq 0, j \in J$	Min: $w = \sum_{i\in I} b_i y_i$ s. a: $\sum_{i\in I} a_{ji}y_i \geq c_j, j \in J$ $y_i \geq 0, i \in I$
$x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i\in I} a_{ji}y_i^* = c_j$ $y_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j\in J} a_{ij}x_j^* = b_i$	$\sum_{i\in I} a_{ji}y_i^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0$ $\sum_{j\in J} a_{ij}x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0$
$x_j^*\left(\sum_{i\in I} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, j \in J$ $y_j^*\left(\sum_{i\in I} a_{ij}x_i^* - b_i\right) = 0, i \in I$	

Tabela 11:Quadro esquema das relações de complementaridade entre primal-dual

Podemos dizer que as soluções dos problemas primal/dual estão intimamente relacionadas. Essas relações conhecidas como desvios complementares. Se uma variável, de qualquer dos problemas, for não nula na solução ótima, então a restrição correspondente do outro problema encontra-se saturada (satisfeita na igualdade). Se uma restrição de qualquer dos problemas não se encontra saturada na solução ótima desse problema, então no outro problema a variável associada a essa restrição é nula na solução ótima.

Exemplo 4.2.1 considere-se o problema de P.L dado no *Exemplo 2.2.2*

Maximizar: $z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{lrcr}
s.a: & 20x_1 + 40x_2 & \leq & 800 \\
& 15x_1 + 12x_2 & \leq & 450 \\
& x_1 \qquad\quad & \leq & 30 \\
& x_2 & \leq & 20 \\
& x_1, \qquad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Sendo a forma padrão deste problema a seguinte:

Maximizar: $z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
s.a: & 20x_1 & +40x_2 & +x_3 & & & & = & 800 \\
& 15x_1 & +12x_2 & & +x_4 & & & = & 450 \\
& x_1 & & & & +x_5 & & = & 30 \\
& & x_2 & & & & +x_6 & = & 20 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

O problema dual, na forma canónica, é dado por:

Minimizar: $w = 800y_1 + 450y_2 + 30y_3 + 20y_4$

$$
\begin{array}{lcccccc}
s.a: & 20y_1 & +15y_2 & +y_3 & & \geq & 1 \\
& 40y_1 & +12y_2 & & +y_4 & \geq & 1 \\
& y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

A forma padrão do problema dual é, então:

Minimizar: $w = 800y_1 + 450y_2 + 30y_3 + 20y_4$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
s.a: & 20y_1 & +15y_2 & +y_3 & & -y_5 & & = & 1 \\
& 40y_1 & +12y_2 & & +y_4 & & -y_6 & = & 1 \\
& y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5, & y_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Na resolução do problema primal foi utilizado o método do simplex tendo sido obtido o seguinte quadro ótimo:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_5	0	0	1/30	–1/9	1	0	20/3
x_2	0	1	1/24	–1/18	0	0	25/3
x_1	1	0	–1/30	1/9	0	0	70/3
x_6	0	0	–1/24	1/18	0	1	35/3
$z_j - c_j$	0	0	1/120	1/18	0	0	95/3

Neste quadro, além da identificação da solução ótima do problema primal é também possível identificar a solução ótima do problema dual.

A solução ótima do problema primal, é:

$x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{70}{3}, \frac{25}{3}, 0{,}0, \frac{20}{3}, \frac{35}{3}\right)$ e z = $\frac{95}{3}$

Atendendo às propriedades apresentadas dos desvios complementares tem-se

$x_1 y_5 = 0$ $\quad$ $y_1 x_3 = 0$ $\quad$ $y_3 x_5 = 0$
$x_2 y_6 = 0$' $\quad$ $y_2 x_4 = 0$' $\quad$ $y_4 x_6 = 0$

Da resolução do sistema (4.13) a solução básica ótima do problema dual é:

$y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = \left(\frac{1}{120}, \frac{1}{18}, 0{,}0{,}0{,}0\right)$ e w = $\frac{95}{3}$.

4.3. Interpretação Económica

A grande importância do modelo dual deve-se também ao facto de o modelo dual fornecer informação económica relevante acerca dos recursos limitados do problema primal. Vamos assumir os problemas se encontram na forma canónica, onde o problema primal é o problema de maximização.

O preço sombra ou valor marginal da restrição $i \in I$ é o valor da variável dual y_i associada a essa restrição e representa a variação que sofre o valor ótimo z^* do problema quando se adiciona ao termo independente dessa restrição uma unidade, mantendo a base corrente; corresponde também ao *preço justo* que pagaríamos por mais uma unidade desse recurso.

O *custo reduzido* da variável $x_j, j \in J$ é dado por $z_j - c_j = c_B A_B^{-1} a_j - c_j = y_B a_j - c_j$ e traduz a variação na função objetivo por cada unidade de aumento de x_j. O z_j indica a valorização, no plano corrente, dos recursos necessários a uma unidade do produto/ atividade j e c_j indica o lucro dessa unidade. Assim $z_j - c_j$ mede o custo de oportunidade por não incrementar o x_j.

No Exemplo 4.2.1, já mostrámos a formulação do problema primal, do respetivo problema dual, bem como indicamos as soluções ótimas de ambos os problemas primal e dual.

Max: $z = x_1 + x_2$	*Min*: $w = 800y_1 + 450x_2 + 30y_3 + 20y_4$
$s.a$: $20x_1 + 40x_2 \leq 800$ $15x_1 + 12x_2 \leq 450$ $x_1 \leq 30$ $x_2 \leq 20$ $x_1, \quad x_2 \geq 0$	s. a: $20y_1 + 15y_2 + y_3 \geq 1$ $40y_1 + 12y_2 + y_4 \geq 1$ $y_1, \quad y_2, \quad y_3, \; y_4 \geq 0$
$x^* = \left(\frac{70}{3}, \frac{25}{3}, 0,0, \frac{20}{3}, \frac{35}{3}\right)$ z = $\frac{95}{3}$	$y^* = \left(\frac{1}{120}, \frac{1}{18}, 0,0,0,0\right)$ $w = \frac{95}{3}$.

Tabela 12:Interpretação económica das soluções do problema no Exemplo 2.2.2

Efetuamos de seguida uma descrição mais detalhada da solução primal e da solução dual indicando também uma descrição económica das soluções.

z = $\frac{95}{3}$. A quantidade total de produção da empresa NCBA é 31.66 toneladas.

$x_1 = \frac{70}{3}$ A quantidade de produção de café robusta é de 23.34 toneladas.

$x_2 = \frac{25}{3}$ A quantidade de produção do café arábica é de 8.33 toneladas.

x_3= 0 O recurso área disponível foi esgotado.

x_4= 0 O recurso número de trabalhadores foi esgotado.

$x_5 = \frac{20}{3}$ A produção do café robusta fica aquém 6.33 toneladas do limite máximo.

$x_6 = \frac{35}{3}$ A produção do café arábica fica aquém 11.66 toneladas do limite máximo.

$w = \frac{95}{3}$ Valorização interna dos recursos.

$y_1 = \frac{1}{120}$ Valorização interna de cada hectare de área disponível.

$y_2 = \frac{1}{18}$ Valorização interna do cada trabalhador.

y_3 = 0 Valorização interna do limite máximo para a produção de café robusta. Como o limite não foi atingido a sua valorização interna é nula (por exemplo, aumentando o limite para 31 tonelada, a solução ótima não sofreria alteração.).

y_4 = 0 Valorização interna do limite máximo para a produção do café arábica.

$z_1 - c_1$= 0 Perda de oportunidade de produção café robusta. É nula pois a produção é positiva.

$z_2 - c_2$= 0 Perda de oportunidade de produção café arábica. É nula pois a produção é positiva.

Exemplo 4.3.1 Consideremos agora o seguinte exemplo.

Uma indústria dispõe de dois recursos A e B, com os quais pretende produzir três produtos $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$. O quadro abaixo indica a utilização unitária de cada recurso para produzir uma unidade de cada um dos produtos, e respeitantes as disponibilidades das matérias primas (em quantidades limitadas). A indústria sabe que cada unidade produzida de P_1 tem uma margem unitária de lucro de \$1.00, cada unidade produzida de P_2 tem uma margem unitária de lucro de \$ 5.00, e cada unidade produzida de P_3 tem uma margem unitária de lucro de \$ 4.00. O problema de programação da produção consiste em determinar a quantidade a ser feita de cada produto de forma a maximizar a margem de lucro total.

Recurso	Disponibilidade	Recurso gasto para produzir uma unidade do produto		
		P_1	P_2	P_3
A	18 (máximo)	5	7	2
B	12 (máximo)	4	3	2

O modelo de Programação Linear é

Max: $z = x_1 + 5x_2 + 4x_3$

$$
\begin{array}{llcl}
s.a: & 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 & \leq & 18 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq & 12 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

E o respetivo quadro ótimo é:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	1	4	0	1	– 1	6
x_3	2	3/2	1	0	1/2	6
$z_j - c_j$	7	1	0	0	2	24

onde x_4 e x_5 são as variáveis de folga associadas à 1ª e 2ª restrição, respetivamente.

A interpretação económica, válida apenas enquanto a base correspondente ao atual plano de produção se mantiver, é a seguinte:

(i). x_1= 0 e $z_1 - c_1$ = 7 ($\Leftrightarrow 5y_1 + 4y_2 \geq 1$): o produto P_1 não é produzido porque a sua perda de oportunidade é não nula (= 7). Significa que a valorização interna das matérias primas necessárias dos recursos A e B para a produção de uma unidade de P_1 é superior ao seu lucro unitário pelo que a produção de uma unidade de P_1 provocaria um decréscimo de \$7 no lucro.

(ii). x_2=0 e $z_2 - c_2$= 1 ($\Leftrightarrow 7y_1 + 3y_2 \geq 5$): o produto P_2 não é produzido porque a sua perda de oportunidade é não nula (= 1), significa que a valorização interna das matérias primas necessárias dos recursos A e B da produção de uma unidade de P_2 é superior ao seu lucro unitário pelo que a produção de uma unidade de P_2 provocaria um decréscimo de \$1 no lucro.

(iii). x_3= 6 e $z_3 - c_3 = 0$ ($\Leftrightarrow 2y_1 + 2y_2 = 4$): são produzidas 6 unidades do produto P_3 pelo que a sua perda de oportunidade é nula.

(iv). x_4= 6 e y_1 = 0 ($\Leftrightarrow 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 18$): a matéria prima disponível no recurso A fica aquém 6 unidades do limite máximo pelo que a sua valorização interna é nula.

(v). x_5= 0 e y_2 = 2 ($\Leftrightarrow 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$): a matéria prima disponível no recurso B foi esgotada, trata-se de um recurso escasso porque a sua valorização interna é não nula. Este recurso foi internamente valorizado em 2 unidades o que significa que por cada unidade adicional de matéria prima o lucro aumenta \$2.

4.4. Método Dual do Simplex

Observando a formulação do dual (veja (4.1) e (4.2)), podemos verificar que se executarmos o algoritmo do simplex relativamente à formulação (4.2), o que se mantém em cada iteração é a condição de otimalidade do primal (porque c agora está no lugar de b), e em cada iteração procuramos uma solução cada vez mais próxima da admissibilidade. Isto é o que faz o algoritmo dual do simplex. Suponhamos que ter uma solução básica para o primal que tenha valor melhor que o de qualquer solução admissível, mas que não seja admissível. Representamos esta solução, associada à base A_B, por $x_B = A_B^{-1}b$. Manteremos sempre a condição de admissibilidade dual seja o problema de minimização: a solução sempre será ótima para o primal, $z_j - c_j \leq 0$.

Notamos que enquanto que no algoritmo primal do simplex as soluções são sempre primais admissíveis e a otimalidade é atingida quando se atinge a admissibilidade dual, no algoritmo dual do simplex as soluções são sempre duais admissíveis e a otimalidade é atingida quando se atinge a admissibilidade do primal. O algoritmo dual do simplex tem a forma que se apresenta de seguida (Problema de minimização).

(i). Escolha uma solução básica inicial que seja admissível para o dual, isto é, tal que $z_j - c_j = c_B A_B^{-1} a_j - c_j \leq 0$, para todo j, onde A_B é a base associada à solução.

(ii). Seja $\bar{b} = A_B^{-1} b$ a correspondente solução. Se $\bar{b} \geq 0$, PARAR, a solução básica atual é uma solução ótima. Senão, selecione a linha pivot r tal que $\bar{b}_r = \min_{i \in I}\{\bar{b}_i\} < 0$. A variável x_r vai sair da base.

(iii). Se $\bar{a}_{rj} \geq 0$, para todo j, PARAR, a solução dual é ilimitada e o primal é não admissível. Caso contrário, determinar o índice k da coluna pivot pelo seguinte quociente. $\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \min_{j \in J}\left\{\frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} : \bar{a}_{rj} < 0\right\}$. A variável x_k vai entrar na base.

(iv). Atualize a base A_B em que a coluna A_k substitui a coluna A_{B_r}. Atualize os conjuntos de índices I_B e I_N. Volte ao passo (ii).

Exemplo 4.4.1 Considere-se o seguinte problema de P.L.

Minimizar: $z = 800x_1 + 450x_2 + 30x_3 + 20x_4$

$$
\begin{array}{llll}
s.a: & 20x_1 + 15x_2 + x_3 & \geq & 1 \\
 & 40x_1 + 12x_2 \quad + x_4 & \geq & 1 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lembre-se que a propriedade de simetria, propriedade (***i***), afirma que o dual do dual é o primal. Depois introduzir as variáveis de folga x_5 e x_6 obtemos:

Maximizar: $z = -800x_1 - 450x_2 - 30x_3 - 20x_4$

$$
\begin{array}{llll}
s.a: & -20x_1 - 15x_2 - x_3 \quad + x_5 & = & -1 \\
 & -40x_1 - 12x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 & = & -1 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

O quadro do simplex inicial o deste problema é seguinte.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_5	– 20	– 15	– 1	0	1	0	– 1
x_6	– 40	– 12	0	– 1	0	1	– 1
$z_j - c_j$	– 800	– 450	– 30	– 20	0	0	0

Em que a solução básica inicial é dada por: $x^* = (0,0,0,0,-1,-1\,)$ e $y^* = (0,0,800,450,30,20\,)$ que não é primal admissível, mas é dual admissível.

Selecione a linha pivot r : $\bar{b}_r = \min_{i \in I}\{\bar{b}_i\} < 0$, a variável x_r vai sair da base. Pelo que, neste caso, pode ser escolha x_5 ou x_6 sai da base, pois x_r = min {– 1, – 1} = – 1. Vamos escolha x_6 sai da base. O vetor entrar na base é determinando por $\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \min_{j \in J}\left\{\frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} : \bar{a}_{rj} < 0\right\}$, tendo-se então min $\left\{\frac{-800}{-40}, \frac{-450}{-12}, \frac{-20}{-1}\right\} = \frac{-800}{-40} =$ 20. A variável x_1 vai entrar na base, que dá quadro seguinte.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_5	0	– 9	– 1	1/2	1	– 1/2	– 1/2
x_1	1	3/10	0	1/40	0	– 1/40	1/40
$z_j - c_j$	0	– 210	– 30	0	0	– 20	–20

$\Downarrow$

Como a solução obtida não é admissível aplicam-se de novo os critérios de saída e entrada, verificando-se que x_5 sai da base sendo substituir por x_2, a novo solução se-apresenta no quadro seguinte:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	0	1	1/9	– 1/18	– 1 /9	1/18	1/18
x_1	1	0	– 1/30	5/12	1/30	– 5/12	1/120
$z_j - c_j$	0	0	–20/3	–35/3	–70/3	–25/3	–95/3

Após aplicação das operações acima descritas e efetuado operações pivots, por linhas, tal como são efetuadas no algoritmo do simplex, obtemos sucessivamente a solução ótima obtida – dual e primal admissível é $x^* = \left(\frac{1}{120}, \frac{1}{18}, 0,0,0,0\right)$ e $y^* = \left(\frac{70}{3}, \frac{25}{3}, 0,0, \frac{20}{3}, \frac{35}{3}\right)$

com $z^* = w^* = \frac{95}{3}$.

Exercícios –

1. Formule o problema dual dos seguintes problemas de PL. Escreva as relações de complementaridade da Tabela 9.

   a. Minimizar: $z = 2x_1+x_2+4x_3$

   $s.\ a$: $\quad 5x_1-x_2+x_3 \geq 20$

   $x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 16$

   $x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$

   b. Maximizar: $z = 3x_1+5x_2+2x_3$

   s. a: $\quad x_1+2x_2+x_3 \leq 16$

   $3x_1+x_2+x_3 \leq 25$

   $2x_1+x_2+2x_3 \leq 20$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

   c. Maximizar: $z = 3x_1+5x_2+2x_3$

   s. a: $\quad x_1+2x_2+x_3 \geq 8$

   $3x_1+x_2+x_3 \leq 25$

   $-x_1+x_2+2x_3 \leq 20$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2. Considere-se o problema seguinte. Indique o dual e resolva-o graficamente. Utilize os teoremas da dualidade para obter os valores de todas as variáveis primais a partir da solução ótima do dual.

   a. Minimizar: $z = 2x_1+x_2+4x_3$

   $s.\ a$: $\quad 5x_1-x_2+x_3 \geq 20$

   $x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 16$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

   b. Maximizar: $z = 2x_1+x_2-2x_3+x_4$

   $s.\ a$: $\quad 2x_1+4x_2+x_3+3x_4 \leq 12$

   $5x_1+2x_2+x_3 - x_4 \leq 18$

   $x_1, x_2, x_5, x_4 \geq 0$

   c. Minimizar: $z = x_1+2x_2$

   $s.\ a$: $\quad 5x_1+3x_2 \geq 15$

$-x_1 + 3x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

d. Minimizar: $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$

s. a: $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 9$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 18$

$x_1, x_2, x_5, x_4 \geq 0$

e. Minimizar: $z = 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4$

s. a: $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 10$

$8x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 18$

$x_1, x_2, x_5, x_4 \geq 0$

Capitulo 5

5. Pós–otimização e Análise de Sensibilidade

O objetivo da programação linear é determinar os valores para variáveis de modo que a otimizar (maximizar/minimizar) a função objetivo e a satisfazer as restrições de um modelo matemático, de modo a fornecer ao analista um melhor entendimento do problema em estudo. A solução ótima de um problema é calculada com base nos dados do modelo, que podem sofrer variações ditadas por várias razões, como por exemplo, os dados terem sido estimados; novas informações ou novas possibilidades aparecerem após a formulação do modelo. Desta forma, é importante estudar a estabilidade da solução, em face dessas variações.

A ***análise de sensibilidade***, ou análise pós-otimal, é um conjunto de técnicas que, de forma bastante simples (em programação linear) nos fornece informações sobre a sensibilidade da solução ótima relativamente a alterações na formulação do problema, Analisaremos neste texto os seguintes casos: alteração no vetor c dos coeficientes da função objectivo, alteração no vetor b dos termos independentes, alteração nos coeficientes da matriz A das restrições, introdução de uma nova variável (actividade), introdução de uma nova restrição.

pós–otimização consiste em re-otimizar o problema quando os dados iniciais do problema são alterados, sem resolver o problema desde o início (*ver* [1], [6], [7], [8], [10], [17], [19]).

5.1 Alteração no vetor *c* dos coeficientes da função objectivo

O valor do coeficiente na função objetivo (custo) de uma ou mais variáveis é modificado de c_k para $\bar{c}_k$. Neste caso vamos ter duas situações consoante a variável x_k seja ou não variável básica na atual solução ótima.

(i). **x_k não é uma variável básica.**

O vetor c_B dos coeficientes das variáveis básicas não é alterado pelo que $z_j = c_B A_B^{-1} a_j$ não sofre qualquer modificação para qualquer variável. Deste modo $z_k - c_k \leq 0$ será substituído por $z_k - \bar{c}_k = z_k - c_k + (c_k - \bar{c}_k)$. Duas situações podem ocorrer:

Se $z_k - \bar{c}_k \leq 0$, a solução continua ótima no caso problema minimização.

Se $z_k - \bar{c}_k > 0$ há que fazer x_k entrar na base, procedendo de forma usual, com o algoritmo do simplex.

(ii). **x_k é uma variável básica.**

se x_k é uma variável básica, então o vetor c_B dos coeficientes das variáveis básicas é alterado, pelo que $z_j = c_B A_B^{-1} a_j$ é modificado para todas as variáveis não básicas. Também é necessário modificar o valor da função objetivo. Deste modo depois de modificar a última linha do quadro do simplex é necessário prosseguir com o algoritmo do simplex como é habitual caso a otimalidade tenha sido alterada.

Exemplo 5.1. Consideremos o exemplo com respetivo quadro ótimo seguinte.

Maximizar: $z = 3x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{llcl}
s.a: & -x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1, \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	3/2	1	1/2	0	7	0
x_1	1	1/ 2	0	1/2	0	2	3
x_5	0	-5/2	0	-1/2	1	2	0
$z_j - c_j$	0	1/ 2	0	3/2	0	6	

$x^* = (2, 0,7,0,2)$ e $z^* = 6$

Por exemplo vamos alterar c_2 =1 para $\bar{c}_2$= 4. Como x_2 não é variável básica o novo custo reduzido é dado por:

$$z_2 - \bar{c}_2 = c_B A_B^{-1} a_2 - \bar{c}_2 = [0\ \ 3\ \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2} \text{ ou}$$

$\bar{c}_2$= $c_2 + \Delta$ = 1 + 3 então $z_2 - \bar{c}_2$ = $(z_2 - c_2) - \Delta$ = $\frac{1}{2} - 3$ = $-\frac{5}{2}$ < 0.

Como o custo reduzido é negativo será necessário re-otimizar.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	3/2	1	1/2	0	7	0
x_1	1	½	0	1/2	0	2	3
x_5	0	-5/2	0	-1/2	1	2	0
$z_j - c_j$	0	– 5/2	0	3/2	0	6	

$\Downarrow$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}^*$	c_B
x_3	-3	0	1	-1/2	0	1	0
x_2	2	1	0	1	0	4	4
x_5	5	0	0	2	5/2	12	0
$z_j - c_j$	5	0	0	4	0	16	

O novo quadro ótimo foi obtido. A solução neste caso é x^* = (0, 4, 1, 0, 12) e z^* = 16.

De seguida vamos estudar a variação dos coeficientes da função objetivo que não alteram a solução ótima do problema (conhecida como análise de sensibilidade).

No caso de alteração de um coeficiente de uma variável não básica só o seu custo reduzido é alterado. Suponhamos que o coeficiente de uma variável não básica, c_j, é alterado para $\bar{c}_j$, isto é $\bar{c}_j = c_j + \Delta$. Então novo custo reduzido é dada por:

$$z_j - \bar{c}_j = c_B A_B^{-1} a_j - \bar{c}_j = c_B A_B^{-1} a_j - (c_j + \Delta).$$

$= \left(c_B A_B^{-1} a_j - c_j\right) - \Delta = \left(z_j - c_j\right) - \Delta$

Então a solução básica permanece ótima para $\left(z_j - c_j\right) - \Delta > 0$.

Para $\left(z_j - c_j\right) - \Delta = 0$ temos soluções ótimas alternativas.

No ***Exemplo 5.1***, sabemos que $z_2 - \bar{c}_2$ = $(z_2 - c_2) - \Delta$ = $\frac{1}{2} - \Delta$

Se $\frac{1}{2} > \Delta$ então a solução continua ótima com z = 6.

Se $\frac{1}{2} = \Delta$ então temos soluções ótimas alternativas.

Se $\frac{1}{2} < \Delta$ então a atual solução deixa de ser ótima e é necessário re-otimizar.

No caso de alteração dos coeficientes da função objetivo de uma variável básica, o vetor c_B vem alterado e todos os custos reduzidos não nulos têm de ser recalculados.

5.2 Alteração no vetor *b* dos termos independentes

O vetor dos termos independentes é modificado de b para $\bar{b}$. Neste caso teremos de calcular $A_B^{-1}\bar{b}$ bem como o novo valor da função objetivo. Em geral, se modificarmos b para $\bar{b}$, onde $\bar{b} = b + \Delta$ então $c_B A_B^{-1}\bar{b} = c_B A_B^{-1} b + c_B A_B^{-1}\Delta$. Como o quadro anterior era óptimo, após termos modificado a última coluna do quadro do simplex devemos prosseguir com o algoritmo dual simplex caso a admissibilidade do primal tenha sido violada.

Exemplo 5.2 Considere-se o *exemplo 5.1* com respetivo quadro ótimo. Considere que o vetor $b = \begin{bmatrix}5\\4\\4\end{bmatrix}$ dos termos independentes é alterado para $\bar{b} = \begin{bmatrix}5\\6\\4\end{bmatrix}$. Então

$$A_B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & -1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\3\\1\end{bmatrix}.$$

A nova solução ótima é dada por: $x^* = (3,0,8,0,1)$ com valor óptimo

$z = c_B A_B^{-1}\bar{b}$ = $[0 \quad 3 \quad 0] \times [8 \;\; 3 \;\; 1]^t = 9$.

No caso de pretendermos estudar a variação dos termos independentes que não originem uma mudança da estrutura da solução (as variáveis básicas permanecem alteradas, mas o seu valor é alterado) então consideramos $\bar{b} = b + \Delta = \begin{bmatrix} 5+\Delta_1 \\ 4+\Delta_2 \\ 4+\Delta_3 \end{bmatrix}$ e vem

$$A_B^{-1}\bar{b} = A_B^{-1}b + A_B^{-1}\Delta = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 + 0.5\Delta_2 \\ 0.5\Delta_2 \\ \Delta_3 - 0.5\Delta_2 \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que para a solução ser admissível é necessário que o valor de cada variável seja não negativo. Portanto temos: $\begin{cases} 14 + 2\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0 \\ 4 + \Delta_2 \geq 0 \\ 4 + 2\Delta_3 - \Delta_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\Delta_1 + \Delta_2 \geq -14 \\ \Delta_2 \geq -4 \\ 2\Delta_3 - \Delta_2 \geq -4 \end{cases}$.

Os conjuntos dos pontos que satisfazem as desigualdades são denominadas intersecção semiplanos. Note que $\bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, onde $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ satisfaz as desigualdades em cima, pelo que a solução continua primal admissível e, portanto, o quadro continua ótimo embora a solução ótima venha alterada.

5.3 Alteração na matriz *A* das restrições

A coluna na matriz das restrições de uma variável pode ser modificada de a_k para $\bar{a}_k$.

(i). **Se x_k não é uma variável básica.**

A nova coluna $A_B^{-1}\bar{a}_k$ tem de ser calculada bem como o novo valor do custo reduzido $\bar{z}_k - c_k = c_B A_B^{-1}\bar{a}_k - c_k$. Se $\bar{z}_k - c_k \leq 0$ a solução continua ótima (no caso problema minimização), se $\bar{z}_k - c_k > 0$ há que fazer x_k entrar na base procedendo como é habitual no algoritmo do simplex. Considere-se a alteração de a_k para $\bar{a}_k$ relativa a uma coluna de matriz A correspondente a uma variável não básica, tal que $\bar{a}_k = a_k + \Delta$. Então

$$c_B A_B^{-1}\bar{a}_k - c_k = c_B A_B^{-1}a_k + c_B A_B^{-1}\Delta - c_k = (c_B A_B^{-1}a_k - c_k) + c_B A_B^{-1}\Delta$$

$$= (z_k - c_k) + c_B A_B^{-1}\Delta$$

Exemplo 5.3 Considere-se o *Exemplo 5.1* com respetivo quadro ótimo.

Vamos alterar $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ para $\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, isto é $\bar{a}_2 = a_2 + \Delta$, com $\Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então

$$c_B A_B^{-1} \bar{a}_2 - c_2 = (z_2 - c_2) + c_B A_B^{-1} \Delta = \frac{1}{2} + [0 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{5}{2} < 0.$$

A solução atual deixou de ser ótima. É necessário re-otimizar usando o primal simplex, com a nova coluna, $A_B^{-1} \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	½	1	½	0	7	0
x_1	1	–1/2	0	½	0	2	3
x_5	0	–3/2	0	–1/2	1	2	0
$z_j - c_j$	0	–5/2	0	3/2	0	6	

$\Downarrow$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	c_B
x_2	0	1	2	1	0	14	1
x_1	1	0	1	1	0	9	3
x_5	0	0	3	1	1	23	0
$z_j - c_j$	0	0	5	4	0	41	

Nova solução é x^* = (8, 14, 0, 0, 23) com a valor da função objetivo é z = 41.

(ii). **Se x_k é uma variável básica.**

As colunas associadas ao novo conjunto de vetores “básicos” podem deixar de formar uma base, e mesmo que este não seja o caso, a alteração da coluna da matriz das restrições de uma variável básica origina uma alteração da base e, portanto, de A_B^{-1} provocando uma alteração de todo o quadro.

5.4. Introdução de uma nova variável (atividade)

Uma nova variável x_{n+1} com coeficiente na função objetivo c_{n+1} e coluna na matriz das restrições a_{n+1} é considerada. A atual solução com x_{n+1} não básica é admissível para o problema. Sem resolver o problema do início poderemos determinar se será ou não vantajoso realizar a nova atividade, ou seja, levar para a base x_{n+1}. Para isso calculemos:

$$z_{n+1} - c_{n+1} = c_B A_B^{-1} a_{n+1} - c_{n+1}.$$

Se $z_{n+1} - c_{n+1} \leq 0$ (no caso de um problema de minimização) a solução continua ótima e teremos $x_{n+1} = 0$ na solução ótima. Portanto, a solução ótima anterior continua ótima com a nova variável nula.

Se $z_{n+1} - c_{n+1} > 0$, então há que fazer x_{n+1} entrar para a base. Calculamos $A_B^{-1} a_{n+1}$ e procedemos como é habitual no algoritmo do simplex.

Exemplo 5.4 –Continuação do Exemplo 5.1. Dada uma nova variável x_6 com $c_6 = 2$ e $a_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, obtemos: $A_B^{-1} a_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

$$c_B A_B^{-1} a_6 - c_6 = [0\ 3\ \ 0\ ] \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} - 2 = -\frac{1}{2} < 0.$$

Então a atual solução com x_6=0 deixa de ser ótima e é necessário re-otimizar:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	3/2	1	½	0	3/2	7	0
x_1	1	1/2	0	½	0	1/2	2	3
x_5	0	-5/2	0	-1/2	1	5/2	2	0
$z_j - c_j$	0	1/2	0	3/2	0	$-\frac{1}{2}$	6	

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	3	1	4/5	-3/5	0	29/5	0
x_1	1	1	0	3/5	–1/5	0	8/5	3
x_6	0	– 1	0	– 1/5	2/5	1	4/5	2
$z_j - c_j$	0	0	0	7/5	1/5	0	32/5	

A nova solução ótima é $x^*= \left(\frac{8}{5}, 0, \frac{29}{5}, 0,0, \frac{4}{5}\right)$ com $z^* = \frac{32}{5}$.

Nota: suponhamos que c_6 = α. Então se $c_B A_B^{-1} a_6 - c_6$ = $\frac{3}{2}$ – α ≥ 0 a solução ótima anterior não se vai alterar.

5.5 Introdução de uma nova restrição

A introdução de uma nova restrição só pode alterar a região admissível pois o declive da função objetivo não é alterado. Se a atual solução do quadro ótimo satisfaz a nova restrição, então essa solução continua ótima para o novo problema. Se a solução do quadro ótimo não satisfaz a nova restrição, a solução deixa de ser admissível para o novo problema. Neste caso há necessidade de re-otimizar.

Seja $A^{m+1} x \leq b_{m+1}$ a nova restrição e seja x_{N+1} a correspondente variável folga. A esta nova restrição vai corresponder uma linha adicional no quadro do simplex. Consideremos A_B a base ótima antes da adição da nova restrição, $\bar{A}_B = \left[\frac{A_B \quad | \ 0}{A_B^{m+1} | \mp 1}\right]$ a nova base depois de introduzir a nova restrição, e $\bar{A}_B^{-1} = \left[\frac{A_B^{-1} \qquad | \ 0}{\mp A_B^{m+1} A_B^{-1} | \mp 1}\right]$ a respetiva inversa.

Podemos reescrever a nova restrição da seguinte forma:

$$A_B^{m+1} x_B + A_N^{m+1} x_N + x_{N+1} = b_{m+1}$$

e como a solução do quadro é $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$ obtemos para a nova restrição:

$$(A_N^{m+1} - A_B^{m+1} A_B^{-1} A_N) x_N + x_{N+1} = b_{m+1} - A_B^{m+1} A_B^{-1} b \ .$$

Adicionando esta nova linha ao quadro do simplex com variável básica x_{N+1} obtemos uma solução básica do novo problema. Se $b_{m+1} - A_B^{m+1} A_B^{-1} b \geq 0$, então a solução atual é admissível e por tanto mantém-se ótima. Se $b_{m+1} - A_B^{m+1}A_B^{-1}b < 0$ o algoritmo dual do simplex é usado para restaurar a admissibilidade primal.

No caso de uma restrição do tipo $A^{m+1}x \geq b_{m+1}$, a nova restrição pode ser convertida numa restrição do tipo ≤ multiplicando ambos os membros por – 1. De seguida aplica-se o processo descrito anteriormente.

No caso de uma restrição de igualdade $A^{m+1}x = b_{m+1}$, converte-se a restrição em duas. Uma de ≤ e outra de ≥ , e procede-se como anteriormente.

Exemplo 5.5 – Consideremos o *Exemplo 5.1*.

Consideremos a nova restrição $x_1 + x_2 \quad \geq \quad 5$. A solução anterior não satisfaz a nova restrição pois $x_1 + x_2 \quad \geq \quad 5$ ⇔ 2 + 0 ≥ 5. Assim esta nova restrição tem de ser adicionada ao quadro final e re-otimizada. Começamos por converter numa restrição do tipo ≤, ou seja $x_1 + x_2 \geq 5 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 \leq -5$. Introduzindo a variável de folga x_6, e obtemos:

$-x_1 - x_2 + x_6 = -5$ e $x_6 \geq 0$.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	3/2	1	1/2	0	0	7	0
x_1	1	1/2	0	1/2	0	0	2	3
x_5	0	–5/2	0	–1/2	1	0	2	0
x_6	–1	–1	0	0	0	1	–5	0
$z_j - c_j$	0	1/2	0	3/2	0	0	6	

$$A_N^{m+1} - A_B^{m+1}A_B^{-1}A_N = [-1 \quad 0] - [0 \quad -1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = [-1/2 \quad 1/2].$$

$$(A_N^{m+1} - A_B^{m+1}A_B^{-1}A_N)x_N + x_{N+1} = [-1/2 \quad 1/2]\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + x_6.$$

$$b_{m+1} - A_B^{m+1} A_B^{-1} b = [-5] - [0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = -3.$$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	3/2	1	1/2	0	0	7	0
x_1	1	1/2	0	1/2	0	0	2	3
x_5	0	–5/2	0	–1/2	1	0	2	0
x_6	0	–1/2	0	1/2	0	1	–3	0
$z_j - c_j$	0	1/2	0	3/2	0	0	6	

$\Downarrow$

A solução deste quadro é x^* = (2, 0, 7, 0, 2, – 3), que não é primal admissível.

A aplicação do algoritmo dual do simplex permite determinar a nova solução ótimo (resulta o quadro seguinte).

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	c_B
x_3	0	0	1	2	0	3	–2	0
x_1	1	0	0	1	0	1	–1	3
x_5	0	0	0	–3	1	–5	17	0
x_2	0	1	0	–1	0	1	6	1
$z_j - c_j$	0	0	0	2	0	1	3	

Obtém-se a linha pivot é a primeira linha, pois $\min_{i \in I}$ {– 2, – 1, 17, 6} = – 2, e $a_{1j} \geq 0$, para todo j. Logo a solução dual é ilimitada e o problema primal é não admissível.

Exercícios –

1. Relativamente às seguintes alterações ao problema dado no exemplo 5.1. Indique a respetiva solução ótima,

a. Alteração no vetor c dos custos: $\bar{c}_2$= –1, $\bar{c}_1$= –2, $\bar{c}_1$= 5.

b. Alteração no vetor b dos termos independentes:

$\bar{b}^t = [4 \quad 6 \quad 4]$, $\bar{b}^t = [5 \quad 5 \quad 3]$, $\bar{b}^t = [7 \quad 3 \quad 1]$.

c. Alteração na coluna matriz A: $\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

d. Introdução de uma nova restrição:

$x_1 + x_2 \quad = \quad 2$; $x_1 + x_2 \quad \geq \quad 3$; $x_1 - x_2 \quad \geq \quad 2$

2. Consideremos o seguinte exemplo com respetivo quadro ótimo.

Min: z = $3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$

s. a: $2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \geq 12$

$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 10$

$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	c_B
x_1	1	1	0	–7/3	–2/3	1/3	14/3	3
x_3	0	–1	1	5/3	1/3	–2/3	8/3	2
$z_j - c_j$	0	0	0	–14/3	–4/3	–1/3	58/3	

Relativamente às seguintes alterações ao problema dado acima, indique a respetiva solução ótima.

a. Alteração no vetor c dos custos.

$\bar{c}_2$ = 4; $\bar{c}_4$ = 3; $\bar{c}_1$ = 1; $\bar{c}_3$ = 1

b. Alteração no vetor b dos termos independentes.

$\bar{b}^t = [10 \quad 12]$; $\bar{b}^t = [16 \quad 10]$; $\bar{b}^t = [12 \quad 6]$

c. Alteração na matriz A das restrições.

$\bar{a}_1^t = [1 \quad 2]$; $\bar{a}_2^t = [2 \quad 3]$; $\bar{a}_4^t = [1 \quad 3]$

d. Introdução de uma nova variável (atividade).

$c_7 = 2;\ \bar{a}_7^t = [1 \quad 2]$; $c_7 = 5;\ \bar{a}_7^t = [3 \quad -2]$

e. Introdução de uma nova restrição.

$x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 \leq 30$; $4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 8$

3. Considere o seguinte problema de programação linear formalizado pelo CNIC (Centro Nacional de Investigação Científica da Universidade Nacional Timor Lorosa'e) de uma empresa que pretende otimizar (maximizar) o lucro total obtido com a produção de quatro produtos (P_1, P_2, P_3, P_4) com base em dois tipos de matéria prima (MP_1, MP_2).

Max: z = $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$

s. a: $2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 16$

$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 12$

$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0$

A sua resolução pelo algoritmo do simplex deu origem ao seguinte quadro final.

Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	b	c_B
P_2	5	1	0	7	2	1	44	3
P_3	3	0	1	4	1	1	28	2
$z_j - c_j$	20	0	0	28	8	5	188	

a. Qual é o plano ótimo de produção?

b. Dos dois produtos não incluídos no plano ótimo de produção qual é aquele cujo o lucro unitário mais teria de ser aumentado para que a produção se tornasse vantajosa?

c. Admita que, devido a dificuldades de importação, a empresa passa a dispor apenas de cinco unidades de matéria prima (MP_1). Determine o novo plano ótimo e o lucro total a ele associado.

d. Suponha que a empresa pode produzir um novo produto que, ao nível unitário, consome 2 unidades de cada uma das matérias primas e proporciona uma margem de lucro de 10 unidades monetárias. Qual deverá ser o novo plano de produção?

e. Admita que o lucro unitário de $P1$ aumenta 50%. Determine o novo plano ótimo de produção e o correspondente lucro total.

f. Admita que devido a uma quebra na procura a direção da empresa determina que a produção de $P3$ não pode ultrapassar 3 unidades. Determine o impacto desta decisão no lucro da empresa.

Capitulo 6

6. O Problema de transportes

6.1 Introdução

O problema de transportes consiste em determinar a forma mais económica de enviar um bem que está disponível em quantidades limitadas em certos locais (origens) para outros locais onde é necessário (destinos). Dados os custos unitários associados a esse transporte, o problema consiste em determinar a forma de transportar os produtos das várias origens para os vários destinos com o menor custo global.

Os custos unitários de transporte costumam ser representados numa matriz, chamada matriz de custos, de tal modo que o elemento c_{ij} representa o custo de transportar uma unidade do bem em causa da origem i para o destino j. Para que o problema tenha solução é necessário que a soma das quantidades disponíveis nas origens seja igual à soma das quantidades necessárias nos destinos, (*ver* [6], [7], [10], [12], [17], [22]).

6.2 Formulação de um problema de transportes

Num problema típico de transporte pretende-se planear a distribuição de um produto onde ([1], [3], [4], [13],[20],[23]):

(i). Existem m origens ou centros de oferta, cada um dispondo de $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, m$) unidades do produto.

(ii). Existem n destinos ou centros de procura, cada um requerendo $b_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$) unidades do mesmo produto.

(iii). O produto tem de ser deslocado das origens para os destinos de maneira a esgotar as existências em cada origem e a satisfazer as necessidades de cada destino, ou seja, a procura total tem de igualar a oferta total.

Suponhamos que c_{ij} é o custo unitário de transporte entre cada origem i para cada destino j e pretende-se determinar a forma admissível de transportar o produto entre as origens e os destinos com custo mínimo. Para que o problema tenha solução, a seguinte equação de equilíbrio deve ser verificada:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.1}$$

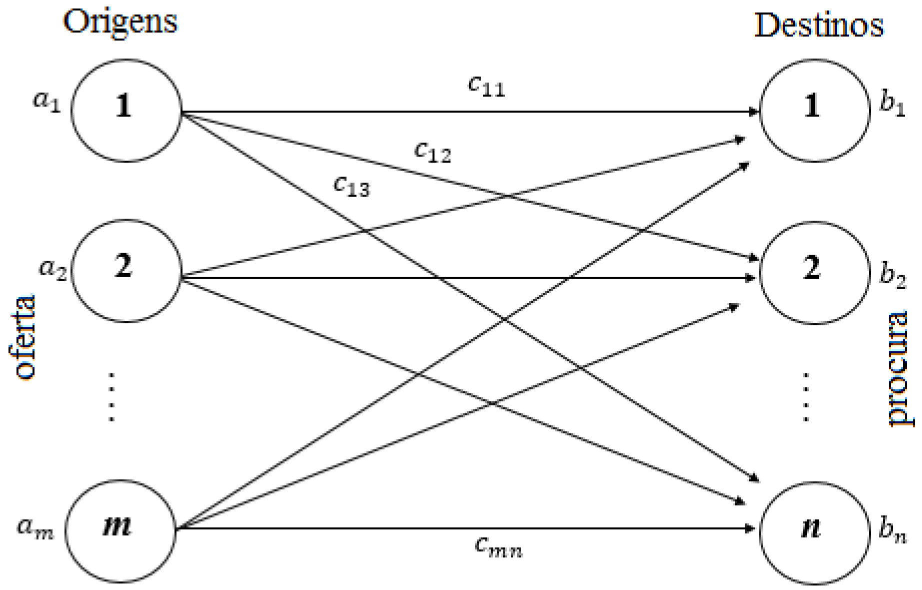

Figura 19:Ilustração problema de transporte por grafo bipartido

O problema de transportes é facilmente representado pelo quadro seguinte com *m* linhas e *n* colunas para além da coluna dos a_i e da linha dos b_j.

		Destino				Oferta
		1	2	…	n	
Origem	1	x_{11} $\boxed{c_{11}}$	x_{12} $\boxed{c_{12}}$	…	x_{1n} $\boxed{c_{1n}}$	a_1
	2	x_{21} $\boxed{c_{21}}$	x_{22} $\boxed{c_{22}}$	…	x_{2n} $\boxed{c_{2n}}$	a_2
	⋮	…	…	…	…	…
	m	x_{m1} $\boxed{c_{m1}}$	x_{m2} $\boxed{c_{m2}}$	…	x_{mn} $\boxed{c_{mn}}$	a_m
Procura		b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Tabela 13: Quadro do problema de transporte

Esta tabela não é mais do que uma variante do quadro do simplex que bem conhecemos, embora se apresente como uma tabela de duas entradas, uma relativa à oferta e outra relativa à procura. Assim, cada célula apresentará quantidade transportada do centro de oferta O_i para o centro de procura D_j, traduzindo, portanto, o valor da variável de decisão x_{ij} correspondente, e também os custos reduzidos associados às variáveis não básicas (nulas), para aquelas ligações que não estão a ser utilizadas numa determinada solução. As pequenas janelas inseridas no canto superior direito de cada célula apresentam os custos de transportes unitários de cada ligação, ou seja, os coeficientes das variáveis na função objetivo.

A igualdade $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ tem que ser sempre verificada, caso tal não aconteça é necessário criar um destino fictício ou uma origem fictícia.

(i). Se $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ criar-se uma origem fictícia, cuja oferta é $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

(ii). Se $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ cria-se um destino fictício, cuja procura é $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

e em ambos os casos os custos de transporte associados serão nulos.

Sendo x_{ij} o número de unidades do produto a transportar entre a origem i e o destino j, o problema de transporte pode ser formalizado matematicamente como problema de Programação Linear do seguinte modo (veja, [1], [4], [3], [20]):

$$Min: \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a: \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m \qquad \textbf{(6.2)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n$$

$x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ e x_{ij} são inteiros.

Onde

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m$, são as restrições em relação a oferta.

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n$, são as restrições em relação à procura.

Em notação matricial é escrito na forma:

$$\begin{aligned} min:&\quad cx \\ s.a:&\quad Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(6.3)}$$

Sendo

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A é uma matriz (m + n) × (mn) em que cada coluna (i, j) é A_{ij}= e_i+ e_{m+j}, isto é, tem a forma especial

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \text{ em que}$$

$\mathbf{1}^T$ é um vetor linha de 1´s com dimensão n

$\mathbf{0}^T$ é um vetor linha de 0´s com dimensão n

I é a matriz identidade n × n

Exemplo 6.1 –

A companhia TOKO LAY, pretende distribuir o cimento existente nos depósitos (armazéns) para os clientes (as lojas). A companhia TOKO LAY tem 3 depósitos distintos e 4 clientes, com a = $[a_i]$ = $[80 \;\; 70 \;\; 50]^t$ (a_i em toneladas) e b = $[b_j]$ = $[40 \;\; 60 \;\; 80 \;\; 20]^t$ (b_j em toneladas), e os custos unitários de transporte dados por:

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

O problema de transportes no *exemplo* 6.1 é facilmente representado pelo quadro seguinte onde, para além da coluna das ofertas a_i e da linha das procuras b_j, está representada a matriz com m=3 linhas e n=4 colunas dos custos de transporte por tonelada, de cada um dos depósitos para cada um dos clientes:

		Destino				Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	
Origem	a_1	1	2	5	4	80
	a_2	4	3	2	3	70
	a_3	1	2	3	1	50
Procura		40	60	80	20	

Quadro 6.1 – Custos de transporte, necessidades e disponibilidades no Exemplo 6.1

A formalização do problema na forma de um problema de programação linear é a seguinte:

Min: z = x_{11}+ 2x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14}+ 4x_{21}+ 3x_{22}+ 2x_{23} +3 x_{24}+ x_{31} + 2x_{32}+ 3x_{33}+ x_{34}

$s.a$: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 80$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20$

$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$

A matriz deste problema e o vetor dos termos independentes, são respetivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 80 \\ 70 \\ 50 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad (\textit{\textbf{6.4}})$$

Repare-se que é uma matriz cujos elementos ou são 0 ou são 1 e que há exatamente dois elementos iguais a 1 em cada coluna. A dimensão da matriz A é $(m + n) \times (mn)$ = 7 × 12.

6.3 Propriedades fundamentais do problema de transportes

(i). O problema de transportes tem sempre uma solução admissível desde que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d$.

Demonstração (veja [2]):

Considerar $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$, para *i* = 1, …, *m* e *j* = 1, …, *n*. É óbvio que $x_{ij} \geq 0$, para *i* = 1, …, *m* e *j* = 1, …, *n*. Por outro lado,

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{b_j}{d} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j$ para *j* = 1, …, *n* e

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i$ para *i* = 1, …, *m*. ■

(ii). Se $0 \leq x_{ij} \leq min\{a_i, b_j\}, \forall i, j$ e $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, então o problema transporte tem sempre solução ótima limitada.

Demonstração:

$0 \leq x_{ij} \leq min\{a_i, b_j\}, \forall i, j$ e $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Como cada x_{ij} é limitado por a_i, b_j então o problema transporte tem sempre solução ótima limitada. ■

(iii). Característica de matriz ***A***, denotada por $car(\boldsymbol{A})$, verifica car($\boldsymbol{A}$) ≤ *m* + *n* – 1.

Demonstração:

Somando as *m* primeiras linhas obtém-se $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Somando as *n* primeiras linhas seguintes obtém-se $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Como se está a considerar que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, então as duas somas são iguais. Conclui-se assim que as linhas da matriz *A* são linearmente dependentes.

A dimensão da matriz ***A*** é $(m + n) \times (mn)$. Desde que *m* ≥ 2 e *n* ≥ 2, é claro que *m*×*n* ≥ m + *n*. Então car(***A***) ≤ m + n – 1. Vamos ilustrar com matriz ***A*** no sentido (**6.4**). Retirando a última linha à matriz **A**, obtém-se uma matriz $\overline{\mathbf{A}}$ que pode ser posta na forma triangular superior mediante uma troca de colunas. No exemplo (veja **6.4**), as colunas de **A** devem ser ordenadas do seguinte modo:

$$\left[\left.\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\boldsymbol{B}} \right| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\boldsymbol{N}} \right],$$

o que corresponde à ordenação x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{11}, x_{12}, x_{13}.

Note-se que det (***B***) = 1 ≠ 0, sendo, portanto, car(***A***) = 3 + 4 – 1 = 6. ■

Para introduzir uma propriedade importante comum a vários problemas com variáveis inteiras temos de introduzir o seguinte conceito.

Definição 6.1 –

Diz-se que uma matriz A é totalmente unimodular se e só se satisfaz as condições seguintes:

1. Todos os seus elementos são 0, 1 e –1.
2. Qualquer uma das suas submatrizes quadradas tem determinante nulo ou ±1.

(iv). A matriz ***A*** é totalmente unimodular.

Demonstração (por indução):

Todos os elementos da matriz do problema de transportes são iguais a 0 ou 1, então o determinante de qualquer submatriz 1×1 ou é nulo ou é igual a 1. Por outro lado, como Car(A) = $m + n – 1$, qualquer submatriz de dimensão $(m + n)\times (m + n)$ tem determinante nulo. Seja A_k uma submatriz de A de dimensão k com $1 < k < m + n$. Já se viu que determinante $\det(A_1) = 0$ ou 1. Suponha-se, como hipótese de indução, que qualquer submatriz de dimensão k – 1 tem determinante nulo ou ±1. A matriz A_k tem que obedecer a uma das seguintes condições:

1. Existe pelo menos uma coluna de zeros
2. Existe pelo menos uma coluna com um único elemento igual a 1 e os outros todos nulos
3. Todas as colunas têm 2 elementos iguais a 1 e os outros todos nulos.

No primeiro caso o determinante da matriz é, obviamente, nulo.

No segundo caso, o determinante pode ser calculado por aplicação do Teorema de Laplace fazendo o desenvolvimento ao longo dessa coluna, obtendo-se $\mp \det(A_{k-1})$, que, por hipótese de indução, ou é nulo ou é ∓ 1.

No terceiro caso, em cada coluna, um dos elementos iguais a 1 corresponde a uma origem e o outro a um destino. Como todas as colunas têm exatamente 2 elementos iguais a 1, somando todas as linhas correspondentes às origens e somando todas as linhas correspondentes aos destinos vai-se obter exatamente a mesma coisa, o que mostra que as linhas são dependentes e, portanto, o determinante da matriz é nulo. ■

(v). Qualquer base ***B*** do espaço das colunas da matriz ***A*** pode ser transformada numa matriz triangular por reordenação de linhas e colunas.

Demonstração:

Seja ***B*** uma matriz $(m + n - 1) \times (m + n - 1)$, tal que $det(\boldsymbol{B}) \neq 0$. Como foi visto na demonstração da propriedade anterior (propriedade (***iii***)), em ***B*** tem que existir pelo menos uma coluna com um único elemento igual a 1 e os outros todos nulos. Reordenando as linhas e as colunas de ***B*** de modo a que esse 1 ocupe a primeira linha e primeira coluna obtém-se: $\begin{bmatrix} 1 & \vert\; q^T \\ 0 & \vert\; B_{m+n-2} \end{bmatrix}$. A matriz B_{m+n-2} também tem que ser não singular e, portanto, tem que ter pelo menos uma coluna com um único elemento igual a 1 e os outros iguais a zero. Reordena-se agora as linhas e colunas de modo a que esse 1 vá ocupar a posição da primeira linha e primeira coluna da matriz B_{m+n-2}, obtendo-se $\begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_2^T \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & B_{m+n-3} \end{bmatrix}$ com B_{m+n-3} não singular. Repetindo o processo acaba-se por obter uma matriz triangular superior com os elementos diagonais todos iguais a 1. ■

(vi). Se os a_i ($\forall i$) e os b_j ($\forall j$) são inteiros, então qualquer solução básica admissível tem valores inteiros.

Demonstração:

Como a matriz da base é uma matriz triangular, constituída apenas por 0s e 1s, a resolução do sistema respetivo conduz necessariamente a uma solução cujas variáveis assumem apenas valores inteiros, pois apenas exige adições e subtrações e todos os coeficientes a_i e b_j são inteiros. ■

6.4 O problema dual do problema transporte

O método simplex pode ser adaptado para explorar a estrutura do problema de transporte.

Vamos considerar a formulação do problema de transportes já em equilíbrio e vamos construir o seu dual associando as variáveis duais u_i: relativamente à oferta i, e v_j relativamente à procura j:

Primal:

Min: $c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$

$$
\begin{array}{lcccl}
s.a: & x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} & = & a_1 & \rightarrow (u_1) \\
 & x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} & = & a_2 & \rightarrow (u_2) \\
 & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots & \vdots \\
 & x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} & = & a_m & \rightarrow (u_m) \\
 & x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} & = & b_1 & \rightarrow (v_1) \\
 & x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} & = & b_2 & \rightarrow (v_2) \\
 & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots & \vdots \\
 & x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} & = & \mathrm{b}_n & \rightarrow (v_n) \\
 & x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m & e & j = & 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Dual:

Max: $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m + b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$

$$
\begin{aligned}
s.a: \quad & u_1 + v_1 \leq c_{11} \leftarrow x_{11} \\
& u_1 + v_2 \leq c_{12} \leftarrow x_{12} \\
& \vdots \\
& u_1 + v_n \leq c_{1n} \leftarrow x_{1n} \\
& \vdots \\
& u_m + v_1 \leq c_{m1} \leftarrow x_{m1} \\
& \vdots \\
& u_m + v_n \leq c_{mn} \leftarrow x_{mn}
\end{aligned}
$$

u_i, v_j livres

Em termos de interpretação económica temos:

$u_i -$ valor marginal das unidades oferecidas em i.

$v_j -$ valor marginal das unidades procuradas em j.

Abreviadamente, temos:

Primal	Dual
$Min: \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ $s.a: \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \ldots, m$ $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \ldots, n$ $x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$	$Max: \sum_{i} a_iu_i + \sum_{j} b_jv_j$ $s.a: u_i + v_j \leq c_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ u_i, v_j livres, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$

Tabela 14: Relações primal-dual do problema de transporte

As condições de complementaridade são

$$(c_{ij} - u_i - v_j)x_{ij} = 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

Se determinarmos um par de soluções admissíveis para o primal e dual, que verifiquem as condições de complementaridade, elas serão ótimas.

6.5 A resolução de problemas de transportes

O problema de transporte pode ser resolvido pelo método simplex. Contudo, vamos apresentar uma sua variante que tem em consideração as especificidades do problema de transportes. A resolução processa-se em três etapas:

Etapa 1: Obtenção de uma solução básica admissível inicial.

Etapa 2: Teste de otimalidade. Se a solução básica admissível atual satisfaz o critério de otimalidade, o processo termina; caso contrario, prossegue para a Etapa 3.

Etapa 3: Método iterativo de melhoramento da solução. Cálculo de nova solução básica admissível através da introdução na base de uma variável não básica em substituição de uma variável básica. Voltar à Etapa 2.

De seguinte descreve-se em detalhe cada uma das etapas deste processo.

6.6.1. Obtenção de uma solução básica admissível inicial

Vamos de seguida verificar como se efetua a representação e caracterização de uma base num problema de transportes. Sendo B uma submatriz básica de A, como A é totalmente unimodular $\det(B) = \pm 1$, $det(B^{-1}) = \pm 1$ e os elementos de B^{-1} são todos 0, 1 ou -1.

Deste modo, qualquer coluna atualizada do quadro do simplex $B^{-1}A_j$ tem apenas os elementos 0, 1 ou -1 e, portanto, qualquer uma destas colunas pode ser obtida pela simples adição e subtração de colunas básicas.

A questão que se coloca neste primeiro passo é como escolher o valor para exatamente $m + n - 1$ variáveis básicas. Existem diversos métodos que nos permitem atingir aquele objetivo, descrevemos de seguida três métodos para a determinação de uma base inicial admissível: o método do Canto Noroeste, o método de Vogel e o método do Custo Mínimo.

6.6.1.1 Método do canto superior esquerdo ou do canto noroeste

Através do método do canto noroeste é possível obter facilmente uma solução básica admissível estabelecendo um plano de transporte entre as origens e os destinos com base num critério de localização, sem ter em conta os custos de transporte. Assim, é selecionada a variável que se encontra no canto superior esquerdo do quadro 7.1, ou seja x_{11} como variável básica tomando o maior valor possível. Depois é escolhida x_{12} ou x_{21} dependendo de se ter satisfeito totalmente a procura do destino 1 ou se ter esgotado a oferta da origem 1. Repete-se ordenadamente este processo até ser esgotado o produto existente em todas as origens e providas todas as necessidades dos destinos. **Exemplo 6.2**–

	b_1	b_2	b_3	b_4	Oferta
a_1	$\boxed{1}$ **40** →	$\boxed{2}$ **40** ↓	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	80
a_2	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ **20** →	$\boxed{2}$ **50** ↓	$\boxed{3}$	70
a_3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ **30** →	$\boxed{1}$ **20**	50
Procura	40	60	80	20	

Quadro 6.2 – Custos de transporte, necessidades, disponibilidades e a solução básica admissível inicial no Exemplo 6.1

Em conclusão, as variáveis básicas iniciais, ou seja, as ligações escolhidas para o transporte de cimento, são x_{11} = 40, x_{12} = 40, x_{22} = 20, x_{23} = 50, x_{33} = 30 e x_{34} = 20. Todas as restantes variáveis são nulas. Repara-se que temos exatamente o número de variáveis básicas necessárias, ou seja, $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. A solução inicial criada pelo método do canto Noroeste tem um custo total de transporte de 390.

A grande desvantagem deste método é a de que não tem em conta a matriz dos custos. Os métodos que se seguem tentam colmatar esta desvantagem.

6.6.1.2 Método do mínimo da matriz de custos

No método do custo mínimo é escolhida para variável básica a que apresente um menor custo. Neste método, em cada passo torna-se básica a variável a que corresponde o menor custo da matriz de entre as células cuja oferta e o destino remanescente sejam positivos.

Exemplo 6.3–

	b_1	b_2	b_3	b_4	Oferta
a_1	$\boxed{1}$ $\mathbf{40^{i}}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{40^{iii}}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	80
a_2	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{70^{iv}}$	$\boxed{3}$	70
a_3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{20^{v}}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{10^{vi}}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{20^{ii}}$	50
Procura	40	60	80	20	200

Quadro 6.3 – Custos de transporte, necessidades, disponibilidades e a solução básica admissível inicial no Exemplo 6.1

Em conclusão, as variáveis básicas iniciais, ou seja, as ligações escolhidas para o transporte de cimento, são x_{11} = 40, x_{12} = 40, x_{23} = 70, x_{32} = 20, x_{33} = 10 e x_{34} = 20. Todas as restantes variáveis são nulas. Repara-se que temos exatamente o número de variáveis básicas necessárias, ou seja, m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6. A solução inicial obtida pelo método do custo mínimo tem um custo total de transporte de 350.

6.6.1.3 O método de Vogel

No método de Vogel são tidos em conta os custos de transporte e são escolhidas as ligações que apresentam o custo mais baixo relativamente à segunda melhor alternativa. Assim, neste método, o critério da escolha da variável a tomar como básica é o do menor custo de transporte da linha ou da coluna associada à maior das diferenças entre os dois menores custos de cada linha e de cada coluna.

Usaremos o chamado método de aproximação de Vogel que é reconhecidamente o melhor deles, ou seja, aquela cuja solução básica inicial, geralmente, está mais próxima da solução ótima.

Etapas do Método

1. Calcule para cada linha e cada coluna a diferença entre os dois menores custos. No caso dos dois menores custos serem iguais a diferença é zero.
2. Identifique a linha ou coluna com a maior diferença. No caso de empate a escolha é arbitrária.

3. Coloque a maior quantidade possível na célula de menor custo da linha ou coluna identificada na etapa 2.
4. Elimine a linha ou coluna esgotada. No caso em que uma linha e uma coluna são esgotadas ao mesmo tempo, só podemos esgotar uma delas ficando a outra com zero, mas não esgotada.
5. Voltar a etapa 1.

Exemplo 6.4–

	b_1	b_2	b_3	b_4	Oferta					
a_1	$\boxed{1}$ 40^{ii}	$\boxed{2}$ 40^{iii}	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	80	1	$\overbrace{1}^{ii}$	$\overbrace{3}^{iii}$	–	–
a_2	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 70^{iv}	$\boxed{3}$	70	1	1	1	$\overbrace{1}^{iv}$	–
a_3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 20^{v}	$\boxed{3}$ 10^{vi}	$\boxed{1}$ 20^{i}	50	0	1	1	1	1^{v}
Procura	40	60	80	20						
	0	0	1	2^{i}						
	0	0	1	–						
	–	0	1	–						
	–	1	1	–						
	–			–						

Quadro 6.4 – Custos de transporte, necessidades, disponibilidades e a solução básica admissível inicial no Exemplo 6.1

Em conclusão, as variáveis básicas iniciais, ou seja, os caminhos escolhidos para o transporte de cimento, são x_{11} = 40, x_{12} = 40, x_{23} = 70, x_{32} = 20, x_{33} = 10 e x_{34} = 20. Todas as restantes variáveis são nulas. Repara-se que temos exatamente o número de variáveis básicas necessárias, ou seja, m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6. Esta solução inicial tem um custo total de transporte de 350.

Habitualmente o método de Vogel e o método da matriz do custo mínimo fornecem uma solução básica admissível que está mais próxima da solução ótima, no entanto o método do canto noroeste é o mais fácil de aplicar.

6.6.2. Métodos iterativos para o teste à otimalidade e melhoramento da solução

Depois de obtida uma solução básica admissível inicial é necessário testá-la para verificar se é ou não ótima e, caso não seja, passar para outra solução básica repetindo o processo até que a solução ótima seja encontrada. Existem vários métodos para tratar esta fase do problema, entre os quais o método do Stepping-Stone e o método de Dantzig sendo a maior diferença entre eles a forma de testar a otimalidade duma solução básica admissível.

Ambos os métodos calculam os custos reduzidos $\nabla_{ij}= z_{ij} - c_{ij}$ (correspondentes aos $z_j - c_j$ do método simplex de um problema de minimização) para cada variável não básica. Os custos reduzidos ∇_{ij} permitem avaliar o impacto na função objetivo da ativação unitária de cada variável não básica.

Se todos $\nabla_{ij}\leq 0$ (num problema minimizar os custos) então PARAR a solução é ótima. Caso contrário, é gerada nova solução fazendo entrar para a base a variável não básica com maior custo reduzido. A nova solução é calculada e o processo é repetido. Esquematicamente, temos:

1. Teste de otimalidade da solução atual.
2. Selecionar a variável de entrada e de saída da base
3. Obter a nova solução básica admissível e seguir para o Passo 1.

6.6.2.1 Método Stepping-Stone

No método Stepping-Stone, depois de ser conhecida solução básica inicial cujo custo total de transporte é z, procede-se do seguinte modo:

1. Determina-se o impacto na função objetivo da ativação unitária de cada uma das variáveis não básicas, calculando $\nabla_{ij}= z_{ij} - c_{ij}$ para cada variável não básica x_{ij}.
2. No caso em que $\nabla_{ij}< 0$ para todas as variáveis não básicas, o processo termina, uma vez que a solução atual é ótima. No caso contrário o processo prossegue.
3. Escolhe-se a variável a entrar na base de acordo com o critério $max\{\nabla_{ij}, \nabla_{ij}\geq 0\}$. A inclusão da variável selecionada forma um único ciclo com as restantes variáveis básicas.
4. Escolhe-se a variável a sair da base de acordo com o critério

$\emptyset = min\{x_{ij}, x_{ij}$ afetado de $-$ no ciclo$\}$. Se houver empate a escolha da variável a sair da base é arbitrária, no entanto a nova solução básica será degenerada.

5. Obtém-se a nova base admissível adicionando ou subtraindo às variáveis que formam o ciclo o valor $\emptyset$ consoante estejam afetadas de + ou - respetivamente. Ou seja:

   $\hat{x}_{ij} = x_{ij} + \emptyset$ se x_{ij} afectado de + no ciclo.

   $\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \emptyset$ se x_{ij} afectado de $-$ no ciclo.

   $\hat{x}_{ij} = x_{ij}$ nos restantes casos.

   Sendo $\hat{z} = z - \emptyset \nabla_{ij}$.

6. Voltar ao passo 1.

Relativamente ao ***Exemplo 6.2***, ative-se a variável x_{13} a nível unitário. A inclusão desta ligação no plano de transporte forma um ciclo com as restantes variáveis básicas.

	b_1	b_2	b_3	b_4	Oferta
a_1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{2}$ 40 $\ominus$	$\boxed{5}$ x_{13} $\oplus$	$\boxed{4}$	80
a_2	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 20 $\oplus$	$\boxed{2}$ 50 $\ominus$	$\boxed{3}$	70
a_3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{1}$ 20	50
Procura	40	60	80	20	200

Sabe-se a solução básica admissível inicial que obtida através do método Canto Noroeste é x_{11} = 40, x_{12} = 40, x_{22} = 20, x_{23} = 50, x_{33} = 30 e x_{34} = 20. A variáveis não básicas são x_{13}=x_{14}=x_{21}=x_{24}=x_{31}=x_{32}= 0.

A resolução do problema tem continuidade com a utilização do método do Stepping-Stone. Assim, vão ser calculados os valores dos ∇_{ij}= $z_{ij} - c_{ij}$ para avaliar o impacto da ativação unitária de cada uma das variáveis não básicas.

Em síntese, o impacto na função objetivo é avaliado da seguinte forma:

$c_{13} - c_{12} + c_{22} - c_{23}$ = 5 – 2 + 3 – 2 = 4 ou

$(c_{12} - c_{22} + c_{23}) - c_{13} = z_{13} - c_{13}$, então

$\nabla_{13}= z_{13} - c_{13}$= (2 – 3 + 2) –5 = – 4.

Note-se que z_{13} representa o custo que se deixa de ter por transportar diretamente os cimentos de deposito O_1 para a cliente D_3 e $\nabla_{13}= z_{13} - c_{13}$ é o valor líquido resultante da inclusão alternativa desse percurso.

Procedendo da mesma forma para as outras variáveis não básicas, tem-se:

$\nabla_{14}= z_{14} - c_{14}$= (2 – 3 + 2 – 3 + 1) – 4 = –5. ∇_{21}= (3 – 2 + 1) – 4 = – 2.

∇_{24}= (2 – 3 + 1) –3 = – 3. ∇_{31}= (3 – 2 + 3 – 2 + 1) –1 = 2.

∇_{32}= (3 – 2 + 3) – 2 = 2.

Verifica-se que a solução básica atual não é ótima porque $\nabla_{31}= \nabla_{32}$= 2 é positivo. As variáveis x_{31} e x_{32} com custos reduzidos positivos são candidatas a entrar na base. Assim, a variável a introduzir na base é escolhida de acordo com critério: $max\{\nabla_{ij}, \nabla_{ij} \geq 0\}$ e neste caso $\nabla_{31}= \nabla_{32}$= 2. Então escolhe-se arbitrariamente x_{31} ou x_{32}. Considerando x_{32} como a variável a entrar na base e atendendo a que $\emptyset = min\{x_{ij}, x_{ij} \text{ afetado de } - \text{ no ciclo}\}$ é atingido para x_{22}, a variável a sair da base é x_{22}. Depois de efetuados os cálculos necessários, a nova solução básica admissível é a solução do quadro 6.4.

Depois calculando de novo os valores dos ∇_{ij} no quadro 6.4 verifica-se que são todos não positivos, assim a solução básica admissível encontrada é ótima sendo: x_{11} = 40, x_{12} = 40, x_{23} = 70, x_{32} = 20, x_{33} = 10 e x_{34} = 20. Todas as restantes variáveis são nulas. A que corresponde o custo total de transporte de 350.

6.6.2.2 Método de Dantzig

No método de Dantzig a determinação dos valores $\nabla_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$ do problema primal de transporte é feita com base na complementaridade dos desvios de problemas duais. Através da análise destes valores é possível concluir se a solução atual é ou não ótima.

Este método baseia-se nos resultados da dualidade e teremos de construir um vetor (u, v) que verifique as condições de complementaridade. Para isso é necessário construir um sistema com $m + n - 1$ equações de tal forma que se x_{ij} é uma variável básica então $u_i + v_j = c_{ij}$, isto é $\nabla_{ij} = 0$. Como uma das $m + n$ restrições do problema primal é redundante, este sistema é indeterminado, pelo que se tem de fixar o valor de uma das variáveis duais (usualmente a zero). Podemos depois resolver o sistema e obter os valores para todas as variáveis duais u e v. O cálculo dos custos reduzidos ∇_{ij} para cada variável não básica obtém-se através da expressão

$$\nabla_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$$

Exemplo: Em seguida, vamos verificar a otimalidade da solução básica admissível inicial obtida através de método do mínimo da matriz de custos.

	b_1	b_2	b_3	b_4	Oferta	u_i
a_1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{2}$ **40**	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	80	u_1
a_2	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ **70**	$\boxed{3}$	70	u_2
a_3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ **20**	$\boxed{3}$ **10**	$\boxed{1}$ **20**	50	u_3
Procura	40	60	80	20	200	
v_j	v_1	v_2	v_3	v_4		

Pelas relações de complementaridade a equação $u_i + v_j = c_{ij}$ é verificada para todo (i, j) correspondente a uma variável básica. Deste modo, fazendo $u_1 + v_1 = c_{11}$ (pois a variável x_{11} é básica) e considerando arbitrariamente $u_1 = 0$ então $v_1 = c_{11} = 1$. Procedendo da mesma forma para as outras variáveis básicas (mas sem necessidade de atribuir mais valores arbitrários às variáveis duais), tem-se:

$u_1 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 2$ $u_3 + v_2 = 2 \Rightarrow u_3 = 0$

$u_3 + v_3 = 3 \Rightarrow v_3 = 3$ $u_2 + v_3 = 2 \Rightarrow u_2 = -1$

$u_3 + v_4 = 1 \Rightarrow v_4 = 1$

Para as variáveis não básicas, verifica-se $\nabla_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - c_{ij}$

$\nabla_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13}$

$= (0 + 3) - 5 = -2$

$\nabla_{14} = -3$ $\nabla_{21} = -3$ $\nabla_{22} = -2$

$\nabla_{24} = -3$ $\nabla_{31} = 0$

Como $\nabla_{ij} \leq 0$, para x_{ij} não básicas, então a solução é ótimal com:

x_{11} = 40, x_{12} = 40, x_{23} = 70, x_{32} = 20, x_{33} = 10 e x_{34} = 20.

Custo total de transporte é 350.

Exercícios –

1. Empresa "*Lalenok ba ema hotu*" decidiu produzir 3 novos produtos (1–virgen Coconut Oil; 2–virgen Canarium Nut oil; 3–virgen candlenut oil) em 5 de suas fábricas. O custo unitário de produção do produto 1 (em 10 litros) é $31, $29, $32, $28 e $29 nas fábricas 1, 2, 3, 4 e 5 respetivamente. Para o produto 2 é $45, $41, $46, $42 e $43 nas fábricas 1, 2, 3, 4 e 5 respetivamente. Para o produto 3 é $38, $35, $40 nas fábricas 1, 2 e 3 respetivamente, enquanto que as fábricas 4 e 5 não tem capacidade de produzir este produto. As previsões de vendas indicam que 150, 250 e 200 litros dos produtos 1, 2 e 3, respetivamente, devem ser produzidas mensalmente. As fábricas 1, 2, 3, 4 e 5 tem capacidade de produzir mensalmente 200, 100, 200, 150 e 250 litros, respetivamente, sejam quais forem os produtos ou combinações deles envolvidos. A empresa deseja minimizar o custo total de produção. Resolva este problema como um problema de Transportes.
2. Uma empresa tem 3 fábricas que produzem um determinado produto. A capacidade de produção mensal das 3 fábricas são 6, 1 e 10 unidades respetivamente. A empresa tem 4 armazéns de vendas que vendem mensalmente 7, 5, 3 e 2 unidades do produto respetivamente. O custo de transportar 1 unidade de cada fábrica para cada armazém está dado na tabela abaixo:

Fábrica	Armazém			
	1	2	3	4
1	2	3	11	7
2	1	0	6	1
3	5	8	15	9

O objetivo da Empresa é atender as necessidades dos armazéns com a produção das fábricas, com o menor custo total.

6.6 Considerações adicionais ao problema de transporte

6.6.1 Oferta total diferente da procura total

O problema de transporte foi formalizado e resolvido supondo que a oferta total igualava a procura total $\left(\sum_i a_i = \sum_j b_j\right)$, situação que corresponde a um problema de transporte ***equilibrado***. Todavia, esta hipótese raramente se verifica, podendo o desequilíbrio derivar de um excesso da oferta em relação a procura $\left(\sum_i a_i > \sum_j b_j\right)$, ou de um excesso de procura em relação à oferta $\left(\sum_i a_i < \sum_j b_j\right)$. Mesmo nesta condição, a solução do problema pode ser obtida por criar um destino ou origem fictício.

No caso de a oferta total ser inferior à procura total $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ cria-se uma origem fictícia cuja oferta é exatamente o défice existente $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$, cujos os custos unitários de transporte são nulos. No caso de a oferta total exceder a procura total $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ cria-se um destino com procura igual ao excesso verificado $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, de forma a equilibrar o sistema, e atribuindo o valor zero aos "custos unitários de transporte".

Exemplo 6.5– Considere os seguintes dados relativos a um problema de transportes no quadro seguinte.

Quadro 6. 5– Dados relativos a um problema de transportes

		Destino				Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	
Origens	a_1	9	6	13	10	200
	a_2	7	6	11	8	350
	a_3	4	12	14	5	150
	Procura	100	140	300	250	

A primeira condição para se poder resolver um problema de transporte é verificar o equilíbrio $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$. Neste caso a oferta total é $\sum_{i=1}^{3} a_i$ = 700 e procura total é

$\sum_{j=1}^{4} b_j$= 790. Como $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ então vamos criar uma origem fictícia, obtendo o seguinte quadro.

		Destino				Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	
Origens	a_1	9	6	13	10	200
	a_2	7	6	11	8	350
	a_3	4	12	14	5	150
	a_4	0	0	0	0	90
	Procura	100	140	300	250	

A resolução do problema faz-se utilizando os procedimentos habituais. A solução ótima é a seguinte:

		Destino				Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	
Origens	a_1	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ **140**	$\boxed{13}$ **60**	$\boxed{10}$	200
	a_2	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$	$\boxed{11}$ **150**	$\boxed{8}$ **200**	350
	a_3	$\boxed{4}$ **100**	$\boxed{12}$	$\boxed{14}$	$\boxed{5}$ **50**	150
	a_4	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ **90**	$\boxed{0}$	90
	Procura	100	140	300	250	

Como a origem 4 é fictícia, x_{43}^{*} = 90 significa que o destino 3 não recebe as 90 unidades. A solução ótima é: x_{12} = 140, x_{13} = 60, x_{23} = 150, x_{24} = 200, x_{31} = 100 e x_{34} = 50 com custo total de transporte de 5520.

6.6.2 Degenerescência - Método da Perturbação

A degenerescência no problema de transporte é frequente e manifesta-se sempre que surjam empates no processo de obtenção de uma solução básica admissível inicial ou aquando da escolha da variável a ser substituída na base. Em caso de empate a escolha pode ser arbitrária, contudo existe a técnica da perturbação que permite identificar as variáveis a tomar como básicas de forma a evitar a possível entrada em ciclo.

O método da perturbação consiste em formular um novo problema de transporte, sem degenerescência, modificando ligeiramente os valores de a_ie b_j da seguinte forma

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}_i = a_i + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \bar{b}_j = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \qquad \bar{b}_n = b_n + m\varepsilon \end{array}\right\}$$

onde $\varepsilon > 0$ e arbitrariamente pequeno, para que a solução obtida seja muito próxima da solução correta. Notamos que, alternativamente, também podemos usar a seguinte modificação nos valores de a_ie b_j

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}_i = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \bar{a}_m = a_m + n\varepsilon \\ \quad \bar{b}_j = b_j + \varepsilon \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}\right\}$$

Exemplo 6.6– Seja o seguinte problema de transportes.

		Destino					Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
Origens	a_1	5	3	1	6	1	600
	a_2	1	4	2	1	5	400
	a_3	2	3	3	2	4	500
	Procura	500	100	200	400	300	

Através do método Canto Noroeste obtém-se a solução básica admissível seguinte:

		Destino					Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
Origens	a_1	$\boxed{5}$ 500	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$	600
	a_2	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 200	$\boxed{1}$ 200	$\boxed{5}$	400
	a_3	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 200	$\boxed{4}$ 300	500
	Procura	500	100	200	400	300	

A solução básica admissível obtida é degenerada, porque (m + n – 1) = 7 e apenas 6 variáveis básicas são positivas. A prossecução na análise da solução ótima requer a identificação da base e, consequentemente, a determinação da variável básica com valor zero.

Aplicando o método da perturbação, tem-se o novo problema,

		Destino					Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
Origens	a_1	$\boxed{5}$ x_{11}	$\boxed{3}$ x_{12}	$\boxed{1}$ x_{13}	$\boxed{6}$ x_{14}	$\boxed{1}$ x_{15}	600 + ε
	a_2	$\boxed{1}$ x_{21}	$\boxed{4}$ x_{22}	$\boxed{2}$ x_{23}	$\boxed{1}$ x_{24}	$\boxed{5}$ x_{25}	400 + ε
	a_3	$\boxed{2}$ x_{31}	$\boxed{3}$ x_{32}	$\boxed{3}$ x_{33}	$\boxed{2}$ x_{34}	$\boxed{4}$ x_{35}	500 + ε
	Procura	500	100	200	400	300 + 3ε	

Aplicando do método do Canto Noroeste permite então obter a seguinte solução básica admissível:

		Destino					Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_4	
Origem	a_1	$\boxed{5}$ 500	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{1}$ ε	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$	$\cancel{600}$ + ε; $\cancel{100}$ + ε; $\cancel{\varepsilon}$
	a_2	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 200 – ε	$\boxed{1}$ 200 +2ε	$\boxed{5}$	$\cancel{400}$ + ε; $\cancel{200}$ +ε
	a_3	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 200 – 2ε	$\boxed{4}$ 300 + 3ε	$\cancel{500}$ + ε; $\cancel{300}$ + ε
Procura		$\cancel{500}$	$\cancel{100}$	$\cancel{200}$	$\cancel{400}$	$\cancel{300 + 3\varepsilon}$	
				$\cancel{200 - \varepsilon}$	$\cancel{200 - 2\varepsilon}$		

Isto é, a variável x_{13} deve ser tomada como básica, obtendo-se assim a seguinte solução básica admissível

		Destino					Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
Origens	a_1	$\boxed{5}$ 500	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{1}$ **0**	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$	600
	a_2	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 200	$\boxed{1}$ 200	$\boxed{5}$	400
	a_3	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 200	$\boxed{4}$ 300	500
	Procura	500	100	200	400	300	

Como se verifica, é suficiente atribuir a ε o valor zero. A obtenção da solução básica admissível ótima é feita utilizando os algoritmos habituais.

6.7 Análise de sensibilidade em problema de transportes.

A análise de sensibilidade procura complementar a resolução de um problema de transporte, de duas formas distintas. Por um lado, evita a reformulação do problema original, tentando dar resposta a alterações ocorridas após definição do problema, a partir do quadro ótimo final. Por outo lado, permite determinar os intervalos de sensibilidade dos parâmetros originais do problema. Estes intervalos de sensibilidade não são mais do que os limites de variação dos dados originais do problema de modo a que o quadro ótimo apresente as mesmas variáveis básicas (veja, [24]).

Exemplo 6.7 – A companha "carya timor leste PTY. LTD. BTK GROUP" produz cerâmica e ferro por encomenda, que são distribuídas – via dois depósitos de mercadorias – a quatro grandes armazéns de revenda que representam os seus únicos clientes. Os custos unitários de transporte, desde os depósitos até aos armazéns de revenda, apurados nos últimos meses, indicam os seguintes valores médios.

		Destino (armazéns)				Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	
Deposito	a_1	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{15}$	80
	a_2	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	20
	Procura	20	25	15	10	

Adicionalmente, para escrever as restrições de procura e as restrições de oferta como restrições de igualdade é necessário que a oferta total seja igual à procura total. Desta forma, como a oferta total é de 100 unidades e a procura total é de 70 unidades, devemos criar um destino fictício com procura de 100 – 70 =30 unidades, como mostra o quadro seguinte:

		Destino (armazéns)					Oferta
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
Deposito	a_1	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{15}$	$\boxed{0}$	80
	a_2	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{0}$	20
	Procura	20	25	15	10	30	100

Depois de resolver o problema utilizando os algoritmos descritos anteriormente e calculado o valor das variáveis duais u_i e v_j através $c_{ij} = u_i + v_j$, foi obtido o seguinte quadro ótimo:

		Destino (armazéns)					a_i	u_i
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
Deposito	a_1	**20** $\boxed{3}$	**5** $\boxed{7}$	**15** $\boxed{8}$	**10** $\boxed{15}$	**30** $\boxed{0}$	80	0
	a_2	$\boxed{10}$	**20** $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{0}$	20	– 3
	b_j	20	25	15	10	30	100	
	v_j	3	7	8	15	0		

Cálculo dos custos reduzidos associados às variáveis não básicas através:

$\nabla_{21} = (u_2 + v_1) - c_{21} = (-3 + 3) - 10 = -10$;

$\nabla_{23} = -1$; $\nabla_{24} = -2$; $\nabla_{25} = -3$;

Porque $\nabla_{ij} \leq 0$, para todas as variáveis não básicas, então a solução no quadro em cima é ótimal com: $x_{11} = 20$, $x_{12} = 5$, $x_{13} = 15$, $x_{14} = 10$, $x_{15} = 30$ e $x_{22} = 20$. Custo total de transporte é 445.

6.8.1 Alteração no coeficiente da função objetivo

(i). Alteração no coeficiente de uma variável não básica.

Por exemplo, cada unidade transportada através da ligação do depósito a_2 para o destino b_1, custa à empresa 10 dólares. Os valores das variáveis duais correspondentes à ligação $(a_2 - b_1)$ são $u_2 = -3$ e $v_1 = 3$, sendo x_{21} não básica com um custo reduzido $\nabla_{21} = -10$ (negativo). Assim, como $\nabla_{21} = -10 \leq 0$, x_{21} permanecerá não básica, pois o custo unitário de transporte é superior ao beneficio que esse transporte proporcionará em 10 dólares: $c_{21} = 10$; $u_2 + v_1 = -3 + 3 = 0$ e $c_{21} > u_2 + v_1$, ou seja, enquanto o custo unitário de transporte se mantiver superior a 0, a ligação $(a_2 - b_1)$ não será utilizada na solução ótima. Isto significa que o custo de transporte teria de ser inferior a 0 dólares para x_{21} passar a ser básica, o que em termos práticos não faz sentido pois os custos de transporte são em geral positivos.

		Destino (armazéns)					a_i	u_i
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
Deposito	a_1	**20** $\ominus$ $\boxed{3}$	**5** $\oplus$ $\boxed{7}$	**15** $\boxed{8}$	**10** $\boxed{15}$	**30** $\boxed{0}$	80	0
	a_2	$\boldsymbol{x_{21}}$ $\oplus$ $\boxed{10}$	**20** $\ominus$ $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{0}$	20	– 3
	b_j	20	25	15	10	30		
	v_j	3	7	8	15	0		

Para as outras três ligações não utilizadas verificamos também que:

Para ligação $(a_2 - b_3)$: c_{23} = 6 ≥ $u_2 + v_3$ = 5.

Para ligação $(a_2 - b_4)$: c_{24}= 14 ≥ $u_2 + v_4$ = 12.

Para ligação $(a_2 - b_5)$: c_{25}= 0 ≥ $u_2 + v_5$ = – 3.

Pelo que, as ligações $(a_2 - b_2)$, $(a_2 - b_3)$ e $(a_2 - b_5)$ não serão utilizadas enquanto os custos de transporte associados forem superiores a: 5, 12, e – 3, respetivamente.

(ii). ***Alteração no coeficiente de uma variável básica***

Sabe-se que x_{13} é uma variável básica e o seu custo reduzido é nulo. Seja $\bar{c}$ o novo custo unitário de transporte entre a_1 e b_3, isto é, c_{13} = 8 passa a ser $\bar{c}$, em que $\bar{c} - (u_1 + v_3)$ = 0. Como $\bar{c}$ pode variar, então u_1 e v_3 têm de alterar o seu valor para que a igualdade se mantenha. Assim, o valor das variáveis duais tem de ser recalculado. Se u_1 = 0 (uma vez que todas as ligações associadas a a_1 estão a ser utilizadas), então, v_3 + 0 = $\bar{c}$ ou v_3= $\bar{c}$.

		Destino (armazéns)					a_i	u_i
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
Deposito	a_1	**20** $\boxed{3}$	**5** $\boxed{7}$	**15** $\boxed{\bar{c}}$	**10** $\boxed{15}$	**30** $\boxed{0}$	80	0
	a_2	$\boxed{10}$	**20** $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{0}$	20	– 3
	b_j	20	25	15	10	30	100	
	v_j	3	7	$\bar{c}$	15	0		

Para a solução continuar ótima, é necessário que $\nabla_{ij}= \left(u_i + v_j\right) - c_{ij} \leq 0$, para todas as x_{ij} não básicas. Neste caso, implica analisar x_{23}, porque se trata de uma variável não básica associada a v_3. Com efeito, todas as células que não usam v_3 na relação $u_i + v_j - c_{ij}$, não são afectadas com a alteração de c_{13} para $\bar{c}$. Assim, para que a variável x_{23} se mantenha não básica é necessário que: $u_2 + v_3 - c_{23} \leq 0 \Rightarrow -3 + \bar{c} - 6 \leq 0$ ou $\bar{c} \leq 9$.

Logo, enquanto $\bar{c} \leq 9$, a ligação $(a_2 - b_3)$ não será utilizada. Só se o custo de transporte da ligação $(a_1 - b_3)$ ultrapassar 9 dólares é que se tornará mais rentável substituí-la pela ligação $(a_2 - b_3)$.

Do mesmo modo analisamos a ligação $(a_2 - b_2)$ que está atualmente a ser utilizada. Seja $\bar{c}$ o custo unitário de transporte entre a_2 e b_2. Substituindo c_{22} por $\bar{c}$ teremos: $u_2 + v_4 - \bar{c} = 0$. Como v_2 na coluna de b_2, está associado a ligações utilizadas teremos que fazer depender u_2 (e não v_2) de $\bar{c}$, para realizar a analise de sensibilidade. Isto porque só haverá mudança de base se uma variável não básica for candidata a entrar para a base.

Assim, teremos: $u_2 + v_2 - \bar{c} = 0 \Leftrightarrow u_2 = \bar{c} - v_4 = \bar{c} - 7$.

As variáveis associadas a u_2, (portanto, que partem de a_2), candidatas a entrar na base são:

A ligação $(a_2 - b_1)$	$u_2 + v_1 - c_{21} \leq 0 \Rightarrow (\bar{c} - 7) + 3 - 10 \leq 0 \Leftrightarrow \bar{c} \leq 14$
A ligação $(a_2 - b_3)$	$u_2 + v_3 - c_{23} \leq 0 \Rightarrow (\bar{c} - 7) + 8 - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \bar{c} \leq 5$
A ligação $(a_2 - b_4)$	$u_2 + v_4 - c_{24} \leq 0 \Rightarrow (\bar{c} - 7) + 15 - 14 \leq 0 \Leftrightarrow \bar{c} \leq 6$
A ligação $(a_2 - b_5)$	$u_2 + v_5 - c_{25} \leq 0 \Rightarrow (\bar{c} - 7) + 0 - 0 \leq 0 \Leftrightarrow \bar{c} \leq 7$

Então, enquanto $\bar{c} \leq 5$ (o menor dos limites encontrados) a ligação $(a_2 - b_3)$ não será utilizada e a base não vai mudar. Se $\bar{c} > 13$, então haverá uma substituição da ligação $(a_2 - b_2)$ pela $(a_2 - b_3)$ de acordo com os cálculos efetuadas.

6.8.2 Alteração nos termos independentes das restrições

(i). Aumento na procura do destino j

Suponhamos que $\bar{b}_3 = b_3 + 1 = 16$. Para que o problema se mantenha equilibrado, e atendendo a que $\sum_j b_j \leq \sum_i a_i$, basta reduzir uma unidade na procura no armazém fictício b_5. Em termos de solução básica, a ligação utilizada sofrerá um aumento x_{13} = 15 + 1 e consequentemente diminuirá x_{15} de 30 para 29.

		Destino (armazéns)					a_i	u_i
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
Deposito	a_1	20 $\boxed{3}$	5 $\boxed{7}$	**16** $\boxed{8}$	10 $\boxed{15}$	**29** $\boxed{0}$	80	0
	a_2	$\boxed{10}$	20 $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{0}$	20	– 3
	b_j	20	25	**16**	10	**29**	100	
	v_j	3	7	8	15	0		

Esta solução corresponde a uma alteração no valor da função objetivo, em 8 dólares: (1 × c_{13}) – (1 × c_{15}) = (1 × 8) – (1 × 0) = 8. Pode-se verificar este valor através das variáveis duais da procura associadas aos dois armazéns, b_3 e b_5, antes da alteração da procura de b_3, é $v_3 - v_5$= 8 – 0 = 8.

(ii). ***Diminuição na procura do destino j***

Suponhamos que a procura diária do armazém b_3 diminuía em 1 unidade $(b_3 = 14)$. Então:

		Destino (armazéns)					a_i	u_i
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
Deposito	a_1	20 $\boxed{3}$	5 $\boxed{7}$	**14** $\boxed{8}$	10 $\boxed{15}$	**31** $\boxed{0}$	80	0
	a_2	$\boxed{10}$	20 $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{0}$	20	– 3
	b_j	20	25	**14**	10	**31**	100	
	v_j	3	7	8	15	0		

A solução que corresponde a uma alteração no valor da função objetivo dada:

$-(1\times c_{13}) + (1\times c_{15})$ = – (1×8) + (1×0) = – 8 dólares. Podemos verificar através das variáveis duais que a variação na função objetivo é: $-(v_3 + u_1)$ = – (8 + 0) = – 8 dólares.

(iii). ***Aumento na oferta da origem i***

Suponhamos que a oferta diária do depósito a_2 aumenta uma unidade $(a_2 = 21)$. De modo manter o equilíbrio vamos aumentar a procura em b_5 para 31. De modo a obtermos uma nova solução admissível vamos incrementar 1 unidade na ligação $(a_1 - b_5)$ (note-se que na coluna b_5, esta é a única ligação com custo reduzido nulo) e 1 unidade na ligação $(a_2 - b_2)$, pela mesma razão. De modo a manter a solução admissível a ligação $(a_2 - b_2)$, diminui 1 unidade.

		Destino (armazéns)					a_i	u_i
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
Deposito	a_1	20 $\boxed{3}$	**4** $\boxed{7}$	15 $\boxed{8}$	10 $\boxed{15}$	**31** $\boxed{0}$	80	0
	a_2	$\boxed{10}$	**21** $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{0}$	**21**	– 3
	b_j	20	25	15	10	**31**	100	
	v_j	3	7	8	15	0		

A alteração no custo total de transporte é dada por:

$(1{\times}c_{22}) - (1{\times}c_{12})$ = (1×4) - (1×7) = – 3 dólares. Este valor pode igualmente ser obtido através das variáveis duais: $u_2 - u_1$= – 3 – 0 = – 3 dólares.

(iv). Diminuição na oferta da origem

Suponhamos que a oferta diária do depósito a_1 diminuía 1 unidade. Como a totalidade da oferta $\sum_i a_i$ não é escoada, basta reduzir uma unidade de b_5 ($b_5 = 30 - 1 = 29$), para manter o problema equilibrado.

		Destino (armazéns)					a_i	u_i
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
Deposito	a_1	20 $\boxed{3}$	**5** $\boxed{7}$	15 $\boxed{8}$	10 $\boxed{15}$	**29** $\boxed{0}$	80	0
	a_2	$\boxed{10}$	**20** $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{0}$	20	– 3
	b_j	20	25	15	10	**29**	100	
	v_j	3	7	8	15	0		

A nova solução ótima não sofreu qualquer alteração.

Exercícios –

1. Considere os seguintes dados relativos a um problema de transportes (***veja***:[16]):

Origem	Destino				Oferta
	1	2	3	4	
1	8	7	8	7	20
2	6	5	5	3	30
3	8	2	7	8	80
Procura	70	40	10	10	

a. Resolva o problema tendo em conta a minimização dos custos de transporte.

b. Verifique se existem soluções básicas ótimas alternativas e, em caso afirmativo, determine-as.

c. Considere as seguintes alterações:

c_{22} = 5 é alterado para c_{22} = 2; c_{12}= 7 é alterado para c_{12}= 9 e c_{23} = 5 é alterado para c_{23}= 4; c_{24} = 3 é alterado para c_{24}= 5. Em cada alínea verifique a optimalidade da solução determinada em a), caso deixe de se verificar, determine a nova solução ótima partindo dessa solução.

d. Considere agora as alterações:

c_{11}= 8 é alterado para $c_{11} = 2 - 4\alpha$ e c_{33}= 7 é alterado para $c_{33} = \alpha$; c_{12} = 7 é alterado para $c_{12} = 3 - 2\beta$. Para cada alínea determine os valores dos parâmetros para os quais a solução determinada em (a), ainda se mantém ótima.

2. Considere a seguinte tabela referente a um problema de transportes com três origens e três destinos. Na tabela estão representados os custos unitários de transporte (em 1000 dólares por tonelada a transportar) de uma determinada mercadoria bem como a oferta total de cada origem e a procura total de cada destino, (***veja***:[16]).

7	8	7	25
12	6	9	15
15	11	4	40
15	40	25	

a. Determine o plano de transportes ótimo.

b. Recebe a informação que o custo de transporte entre a origem 1 e o destino 3, que era de 7, foi alterado e passou a ser de 12. Diga se após esta alteração o plano de transportes que obteve se mantém ótimo.

Capitulo 7

7. Conclusões

Nesta dissertação foi realizada uma abordagem da Programação Linear, apresentando diversos tópicos que permitem um bom conhecimento básico sobre este tema.

O papel, cada vez mais relevante, que a Programação Linear tem desempenhado na resolução problemas que ocorrem nas mais diversas áreas fica ilustrado neste trabalho com a apresentação de alguns exemplos práticos. São igualmente exploradas interpretações económicas sobre aspetos relevantes de um ponto de vista prático, como a valorização económica de recursos limitados, e são exploradas as soluções ótimas obtidas como a obtenção da forma mais económica de enviar um bem disponível em quantidades limitadas em determinados locais para outros locais onde é necessário. É igualmente abordada a análise de sensibilidade de um problema programação linear com objetivo de explorar as consequências que podem decorrer da alteração marginal de alguns dos seus parâmetros, ou de algumas condições, como a introdução de novas atividades, novos investimentos, novas restrições, etc.

De modo a fazer a ligação com o programa atual do Ensino da Matemática, lecionado no Departamento do Ensino da Matemática, da Universidade Timor-Lorosa´e são apresentados conceitos básicos como o envolvente convexo, conjunto convexo e politopo, e, para mais fácil compreensão, são apresentados exemplos que exploram estes conceitos em $\mathbb{R}^2$ e a resolução gráfica destes problemas através de casos específicos de pequena dimensão. O estudo da programação linear permite o aprofundamento de conhecimentos matemáticos na área da Álgebra Linear

Apêndice

Conceitos de grafos

Um **grafo** *G* é um par *G* = (*V*, *E*) onde *V* = *{*1, 2, . . ., *n}* é um conjunto finito e não vazio de pontos, chamados **vértices**, e *E* é um conjunto de pares distintos e não ordenados de elementos de *V*, $E = \{\{i, j\}, i, j \in V, i \neq j\}$, aos quais chamamos **arestas** e que unem elementos de *V*.

Um **grafo dirigido**, ou **dígrafo**, *G* = (*V*, *A*) é um grafo em que os elementos de *A*, aos quais chamamos **arcos**, são pares ordenados de elementos de *V*, ou seja, aos elementos (*i, j*) de *A* está associada uma direção de *i* para *j*. Os grafos e dígrafos representam-se por diagramas em que os vértices são pequenos círculos, eventualmente com uma etiqueta, as arestas são linhas (curvas ou não) que unem os vértices e os arcos são linhas (curvas ou não) que unem os vértices e têm uma seta indicando a sua orientação. Num dígrafo podemos dizer que o arco (*i, j*) sai de *i* e entra em *j*, ou ainda que o vértice *i* é o antecessor/predecessor do vértice *j* e que *j* é o sucessor de *i*.

Os grafos e dígrafos são chamados de *simples* quando nenhuma aresta ou arco aparece mais que uma vez em *E* ou em *A*, e quando nenhum par destes conjuntos é formado por dois vértices iguais, *{i, i}* ou (*i, i*). A estes pares chamamos laços ou lacetes.

Os grafos ou dígrafos que aqui usaremos são simples.

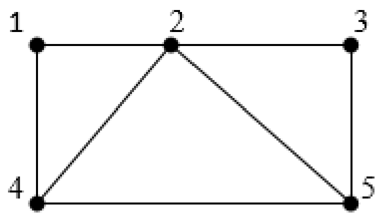

Figura 20: Exemplo de grafo

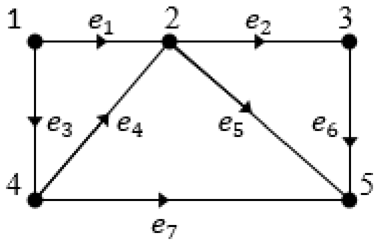

Figura 21:Grafo orientado (dígrafo)

Por simplicidade de escrita, denotaremos os vértices: V= {1, 2, 3, 4, 5} e as arestas: E = {(1,2), (2,3), (1,4), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)}. Na figura 20, dado um dígrafo, onde conjunto dos vértices são V= {1, 2, 3, 4, 5} e conjunto dos arcos: A = $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$, onde e_1 = (1, 2),

e_3 = (1,4) etc. Neste caso diz-se que 1 e 2 são os vértices estremos do arco e_1, e o vértice 1 designa-se por cauda, o vértice 2 por cabeça do arco e_1.

Um grafo G = (V, E) diz-se **bipartido (bigrafo)** se existe uma partição de V em V_1 e V_2 tal que não existem arcos (arestas) em E entre dois vértices de V_1 nem existem arcos (arestas) em E entre dois vértices de V_2. Neste caso G representa-se pelo terno (V_1, V_2, E).

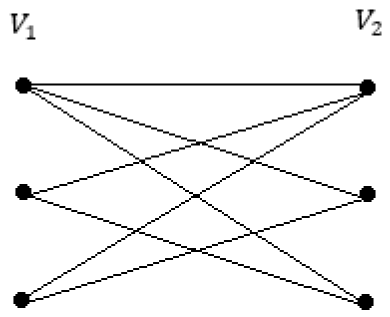

Figura 22: Ilustração grafo bipartido

Bibliografia

[1] B. Mokhtar S., J. J.John, and H. D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 3th editio. A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2005.

[2] G. B. Dantzig, *Linear Programing and Extensions*. Princeton University Press, New Jersey, 1963.

[3] F. S. Hillier and G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, 5th editio. McGraw-Hill Publishing Company, 1990.

[4] G. B. Dantzig and M. N. Thapa, *Linear Programming (Springer Series in Operations Research)*. Springer, 1997.

[5] M. Ramalhete, J. Guerreiro, and A. Magalhães, *Programação Linear. Volume I*. McGraw-Hill Higher Education, 1985.

[6] H. A. Taha, *Operations Research an introduction*, 6th editio. Prentice-Hall, Inc., 1997.

[7] A. de L. Puccini, *Introdução à Programação Linear*. Ao Livro Técnico S.A Rio de Janeiro-GB., 1972.

[8] A. Sultan, *Linear Programing an Introduction with Applications*. 1993.

[9] W. L. Winston, *Operations Research: Aplications and algorithms*. Duxbury Press, 2003.

[10] G. Saul I, *Linear Programing: Methods & Applications*, 4th editio. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1975.

[11] W. L. Winston, *Introduction to Mathematical Programing: Application and Algorithms*, 2th editio. Duxbury Press, 1995.

[12] P. R. Thie, *An Introduction to Linear Programing and Game Theory*. John Wiley & Sons, 1979.

[13] E. D. Nering and A. W. Tucker, *Linear Programs and Related problems*. Academic

Press, Inc., 1993.

[14] R. Saigal, *Linear Programming a Modern Integrated Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1995.

[15] “Makanan 4 Sehat 5 Sempurna : Contoh dan Manfaatnya - HaloSehat.com.” [Online].Disponível em: http://halosehat.com/makanan/makanan-sehat/makanan-4-sehat-5-sempurna-contoh-dan-manfaatnya.

[16] C. Requejo, “sebenta de: Métodos de Investigacao Operacional.” 2014.

[17] K. G. Murty, *Linear Programing*. John Wiley & Sons, 1983.

[18] G. B. Dantzig and M. N. Thapa, *Linear Programming: Theory and Extensions Springer Series in Operations Research*. Springer, 2003.

[19] M. J.Best and K. Ritter, *Linear Programing: Active set analysis and Computer programs*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs New Jersey 07632, 1985.

[20] M. Ramalhete, J. Guerreiro, and A. Magalhães, *Programação Linear. Volume II*. McGraw-Hill Higher Education., 1985.

[21] A. Pereira and C. Luz, “Programação Linear: Apontamentos para a disciplina de Investigação Operacional,” 2003. [Online]. Disponível em: http://ltodi.est.ips.pt/invop/Seb/Proglinear/PLUV.pdf.

[22] J. C. Pellegrini, “Programação Linear (e rudimentos de otimização não linear),” 2016. [Online]. Disponível em: http://aleph0.info/cursos/pm/notas/pl.pdf.

[23] M. Pires, “Programação Matemática Licenciatura em Matemática,” 2005. [Online]. Disponível em: http://w3.ualg.pt/~mpires/PMtexto.pdf.

[24] M. Magalhães Hill, M. Marques dos Santos, and A. Líbano Monteiro, *Investigação Operacional-Vol.3-Transportes, Afetação e Optimização de Redes*, 2ª edição. Edições Sílabo, Lda, 2015.